

Serie numeriche (1)

Definizioni:

- Sia $\{a_n\}$ una successione; si definisca la successione $\{s_n\}$ con $s_n = \sum_{k=0}^n a_k$, dunque:

$$s_0 = a_0, s_1 = a_0 + a_1, s_2 = a_0 + a_1 + a_2, \dots$$

- La successione $\{s_n\}$ definita è la serie di termini a_n . Il termine s_n è la somma parziale n -esima della serie. La serie è indicata con $a_0 + a_1 + \dots + a_k + \dots$ oppure $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

N.B.: Se si effettua la somma partendo da un indice h , si scrive $\sum_{k=h}^{\infty} a_k$

- La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è *convergente, divergente o indeterminata* a seconda che la successione $\{s_n\}$ della somme parziali sia convergente, divergente o indeterminata.

- **Serie geometrica:** E' la serie di termini $a_n = q^n$, $q \in R$. Si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{converge a } \frac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ \text{è indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Serie numeriche (2)

Esempi:

- **Serie armonica:** E' la serie di termini $a_n = 1/n$. Si ha:
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

- **Serie telescopiche:** Sono serie di cui è facile stabilire la convergenza ed eventualmente calcolare la somma. Sono del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$; dunque $s_n = b_0 - b_{n+1}$.

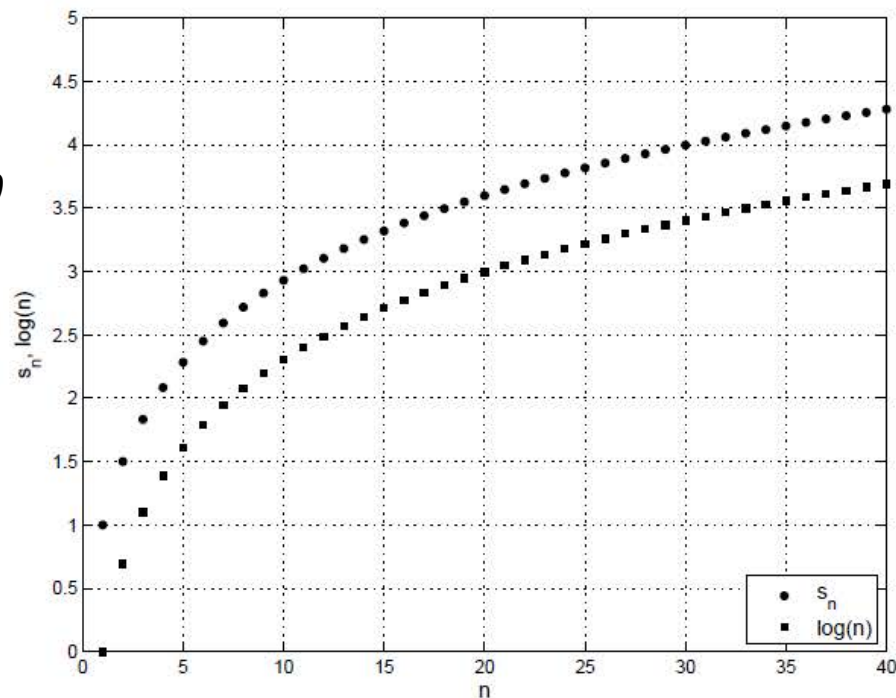
Osservazioni:

- **Condizione necessaria per la convergenza:**

Se la serie $\sum a_n$ è convergente allora $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$

Le successioni $s_n = \sum_{k=1}^n 1/k$ e $\log n \longrightarrow$

- La condizione che la successione $\{a_n\}$ sia *infinitesima* è solo necessaria per la convergenza della serie e non sufficiente, come provato dalla serie armonica



Serie a termini positivi (1)

Proposizioni:

- **Criterio del confronto:** Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi, con $a_n \leq b_n$ definitivamente

Allora:

$$\begin{aligned}\sum a_n \text{ diverge} &\Rightarrow \sum b_n \text{ diverge,} \\ \sum a_n \text{ converge} &\Leftarrow \sum b_n \text{ converge}\end{aligned}$$

- **Criterio del confronto asintotico:** Siano $\sum a_n$ e $\sum b_n$ due serie a termini positivi, con $a_n \sim b_n$

Allora le serie hanno lo stesso comportamento, cioè:

$$\begin{aligned}\sum a_n \text{ diverge} &\iff \sum b_n \text{ diverge,} \\ \sum a_n \text{ converge} &\iff \sum b_n \text{ converge}\end{aligned}$$

Esempi:

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < +\infty$. Infatti $1/n^2 \sim 1/n(n+1)$

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha < +\infty$ se $\alpha \geq 2$

- **Serie armonica generalizzata:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Serie a termini positivi (2)

Proposizioni:

• **Criterio della radice:** Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, con $l \in \mathbb{R}$ o $l = +\infty$. Allora:

$$l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge,}$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge.}$$

• **Criterio del rapporto:** Sia $\sum a_n$ una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = l$, con $l \in \mathbb{R}$ o $l = +\infty$. Allora:

$$l < 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ converge,}$$

$$l > 1 \Rightarrow \sum a_n \text{ diverge.}$$

• **Criterio della radice o del rapporto per successioni:** Sia $\{a_n\}$ una successione, $a_n \geq 0$ per ogni n e supponiamo che $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ oppure $\lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1}/a_n = l$ con $l \in \mathbb{R}$ o $l = +\infty$. Allora:

$$l < 1 \Rightarrow a_n \rightarrow 0,$$

$$l > 1 \Rightarrow a_n \rightarrow +\infty$$

Serie a termini di segno variabile

Definizioni:

- Una serie $\sum a_n$ è detta **assolutamente convergente** se è convergente la serie dei valori assoluti $\sum |a_n|$
- Se una serie converge assolutamente allora converge semplicemente. In tal caso si ha:

$$\left| \sum_{n=0}^{\infty} a_n \right| \leq \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$$

Esempi:

- $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)/n^2$ è convergente. Infatti $|(\sin n)/n^2| \leq 1/n^2$. Perciò la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)/n^2$ converge assolutamente e dunque semplicemente.
- $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n^n$ è convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ è convergente se $a \in \mathbb{R}$.
- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^\alpha$ è convergente se $\alpha > 1$. Infatti $|(-1)^n/n^\alpha| \leq 1/n^\alpha$.

Serie a termini di segno alterno

Definizioni:

Una classe importante di serie a termini di segno variabile è quella delle serie a termini di segno alterno, cioè $\sum (-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$.

- **Criterio di Leibniz:** Consideriamo la serie $\sum (-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$. Allora:

$$\left. \begin{array}{l} \{a_n\} \text{ decrescente} \\ e \ a_n \rightarrow 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \sum (-1)^n a_n \text{ converge}$$

Esempi:

$-\sum (-1)^n/n$ converge (semplicemente).

Infatti la successione $\{1/n\}$ è decrescente e $1/n \rightarrow 0$. Non c'è convergenza assoluta. Pertanto,

$$\text{convergenza assoluta} \not\Rightarrow \text{convergenza semplice}$$

$-\sum (-1)^n (n-1)/(n^2+n)$ converge (semplicemente).

Non c'è convergenza assoluta: $(n-1)/(n^2+n) \sim 1/n$. Per il criterio di Leibniz:

se $a_n = (n-1)/(n^2+n)$ allora $a_{n+1} \leq a_n$ se $n \geq 2$ e $(n-1)/(n^2+n) \sim 1/n \rightarrow 0$.