Serie numeriche (1)

Definizioni:

-Sia $\{a_n\}$ una successione; si definisca la successione $\{s_n\}$ con $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, dunque:

$$s_0 = a_0,\ s_1 = a_0 + a_1,\ s_2 = a_0 + a_1 + a_2,\ \ldots.$$

- La successione $\{s_n\}$ definita è la serie di termini a_n. Il termine s_n è la somma parziale *n-esima* della serie. La serie è indicata con $a_0 + a_1 + \ldots + a_k + \ldots$ oppure $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$

N.B.: Se si effettua la somma partendo da un indice *h,* si scrive $\sum_{k=h}^{\infty} a_k$

- La serie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ è *convergente, divergente o indeterminata* a seconda che la successione $\{s_n\}$ della somme parziali sia convergente, divergente o indeterminata.

- **Serie geometrica:** E' la serie di termini $a_n = q^n$, $q \in R$. Si ha:

$$\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & \text{se } q \geq 1, \\ \text{converge a } \dfrac{1}{1-q} & \text{se } |q| < 1, \\ \text{è indeterminata} & \text{se } q \leq -1 \end{cases}$$

Serie numeriche (2)

Esempi:

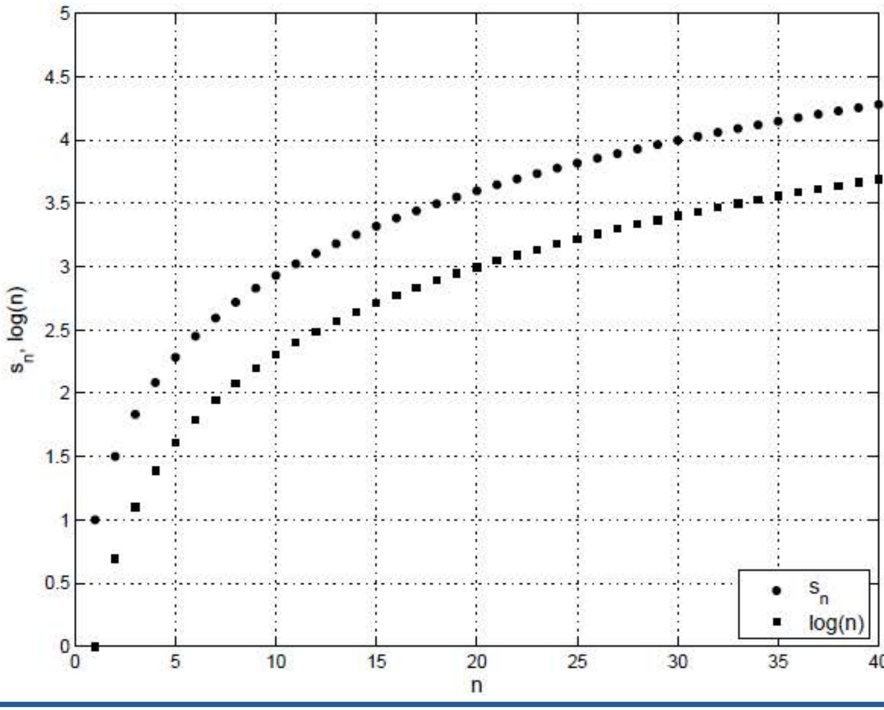
- **Serie armonica:** E' la serie di termini $a_n = 1/n$. Si ha: $$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty$$

- **Serie telescopiche:** Sono serie di cui è facile stabilire la convergenza ed eventualmente calcolare la somma. Sono del tipo $\sum_{n=0}^{\infty} (b_n - b_{n+1})$; dunque $s_n = b_0 - b_{n+1}$.

Osservazioni:

-**Condizione necessaria per la convergenza:**
Se la serie Σa_n è *convergente* allora $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$

Le successioni $s_n = \sum_{k=1}^{n} 1/k$ e $\log n$ ⟶



- La condizione che la successione $\{a_n\}$ sia *infinitesima* è solo necessaria per la convergenza della serie e non sufficiente, come provato dalla serie armonica

Serie a termini positivi (1)

Proposizioni:

• **Criterio del confronto:** Siano Σa_n *e* Σb_n due serie *a termini positivi,* con $a_n \leq b_n$ definitivamente
Allora:

$$\sum a_n \quad \textit{diverge} \quad \Rightarrow \quad \sum b_n \quad \textit{diverge},$$
$$\sum a_n \quad \textit{converge} \quad \Leftarrow \quad \sum b_n \quad \textit{converge}$$

• **Criterio del confronto asintotico:** Siano Σa_n *e* Σb_n due serie *a termini positivi,* con $a_n \sim b_n$
Allora le serie hanno lo stesso comportamento, cioè:

$$\sum a_n \quad \textit{diverge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum b_n \quad \textit{diverge},$$
$$\sum a_n \quad \textit{converge} \quad \Longleftrightarrow \quad \sum b_n \quad \textit{converge}$$

Esempi:

- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^2 < +\infty$. Infatti $1/n^2 \sim 1/n(n+1)$
- $\sum_{n=1}^{\infty} 1/n^\alpha < +\infty$ se $\alpha \geq 2$

- **Serie armonica generalizzata:**

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha} = \begin{cases} \text{diverge} & \text{se } \alpha \leq 1 \\ \text{converge} & \text{se } \alpha > 1 \end{cases}$$

Serie a termini positivi (2)

Proposizioni:

- **Criterio della radice:** Sia Σa_n una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$, con $l \in R$ o $l = +\infty$. Allora:

$$l < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \quad \textit{converge},$$
$$l > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \quad \textit{diverge}.$$

- **Criterio del rapporto:** Sia Σa_n una serie a termini positivi e supponiamo che esista il $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l$, *con* $l \in R$ *o* $l = +\infty$. Allora:

$$l < 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \quad \textit{converge},$$
$$l > 1 \quad \Rightarrow \quad \sum a_n \quad \textit{diverge}.$$

- **Criterio della radice o del rapporto per successioni:** Sia $\{a_n\}$ una successione, $a_n \geq 0$ per ogni n e supponiamo che $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = l$ oppure $\lim_{n\to\infty} a_{n+1}/a_n = l$ con $l \in R$ *o* $l = +\infty$. Allora:

$$l < 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \to 0,$$
$$l > 1 \quad \Rightarrow \quad a_n \to +\infty$$

Serie a termini di segno variabile

<u>*Definizioni:*</u>

• Una serie Σa_n è detta ***assolutamente convergente*** se è convergente la serie dei valori assoluti $\Sigma|a_n|$

• Se una serie converge assolutamente allora converge semplicemente. In tal caso si ha:

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right| \leq \sum_{n=0}^{\infty}|a_n|$$

<u>*Esempi:*</u>

- $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)/n^2$ è convergente. Infatti $|(\sin n)/n^2| \leq 1/n^2$. Perciò la serie $\sum_{n=1}^{\infty} (\sin n)/n^2$ *converge assolutamente* e dunque *semplicemente.*

- $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n^n$ è convergente, $\sum_{n=0}^{\infty} a^n/n!$ è convergente se $a \in R$.

- $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n/n^\alpha$ è convergente se $\alpha > 1$. Infatti $|(-1)^n/n^\alpha| \leq 1/n^\alpha$.

Serie a termini di segno alterno

Definizioni:

Una classe importante di serie a termini di segno variabile è quella delle serie a termini di segno alterno, cioè $\Sigma(-1)^n a_n$, con $a_n \geq 0$.

- **Criterio di Leibniz:** Consideriamo la serie $\Sigma(-1)^n a_n$ con $a_n \geq 0$. Allora:

$$\left.\begin{array}{c} \{a_n\}\ \textit{decrescente} \\ e\ \ a_n \to 0 \end{array}\right\} \Rightarrow \sum(-1)^n a_n\ \ \textit{converge}$$

Esempi:

-$\Sigma(-1)^n/n$ *converge* (semplicemente).
Infatti la successione $\{1/n\}$ è decrescente e $1/n \to 0$. *Non* c'è *convergenza assoluta.* Pertanto,

$$\text{convergenza assoluta} \ \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow}\ \text{convergenza semplice}$$

-$\Sigma(-1)^n(n-1)/(n^2+n)$ *converge* (semplicemente).
Non c'è convergenza assoluta: $(n-1)/(n^2+n) \sim 1/n$. Per il criterio di Leibniz:
se $a_n = (n-1)/(n^2+n)$ allora $a_{n+1} \leq a_n$ se $n \geq 2$ e $(n-1)/(n^2+n) \sim 1/n \to 0$.