Calcolo integrale (1)

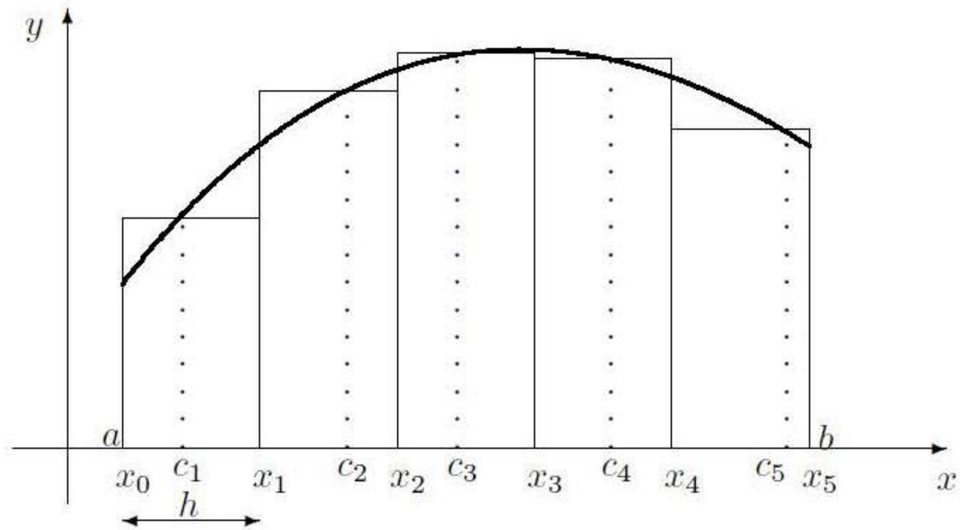
<u>*Definizioni:*</u>

Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione. Dividiamo l'intervallo [a, b] in n parti uguali di lunghezza $(b-a)/n = h$ e siano $x_j = a + jh$, per $j = 0, 1, \ldots, n$ gli estremi dei sottointervalli così determinati, con $x_0 = a$ e $x_n = b$.

Siano $c_j \in [x_{j-1}, x_j]$, per $j = 1, 2, \ldots, n$, dei punti scelti arbitrariamente.

Si consideri l'unione dei rettangoli di base $[x_{j-1}, x_j]$ e altezza $f(c_j)$; l'area della regione di piano è:

$$S_n = [(b-a)/n] \cdot \sum_{j=1}^{n} f(c_j) \, .$$



- La quantità S_n è detta ***n-esima somma di Riemann*** della funzione f.

- Se esiste il $\lim_{n\to\infty} S_n$ esso potrà essere preso come definizione dell'area della regione di piano compresa tra il grafico di f e l'asse delle ascisse.

- Sia $f : [a, b] \to R$ una *funzione continua.* Allora esiste *finito* il $\lim_{n\to\infty} S_n$ e tale limite non dipende dalla scelta dei punti c_j.

Calcolo integrale (2)

Definizioni:

Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua *e* S_n definita come in precedenza. *L' **integrale*** di f su *[a, b]* è:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \lim_{n\to\infty} S_n$$

N.B.: Se la funzione *f* è positiva allora l'integrale di f su *[a, b]* viene preso come definizione dell'area della regione di piano compresa tra *il grafico di f e l'asse delle ascisse.* Analogamente se *f non è positiva;* in tal caso le aree di regioni in cui *f è negativa verranno calcolate negativamente.*

Esempi:

- Sia *f* una funzione continua in *[−a, a];* se *f* è dispari allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 0$, se *f* è pari allora $\int_{-a}^{a} f(x)\,dx = 2\int_{0}^{a} f(x)\,dx$.

  - Consideriamo ad esempio il caso in cui *f* è *dispari:* si scelgano c_j in maniera simmetrica rispetto all'origine: le relative somme di Riemann sono tutte nulle e dunque anche il loro limite. Poiché *f* è continua, l'integrale esiste e, poiché non dipende dalla scelta dei punti c_j, esso *è **nullo**.*

Esempi di calcolo integrale

__Esempi:__

- Per simmetria $\int_0^{2\pi} \sin x \, dx = 0$. Si scelgano punti $c_j \in [0, \pi]$ e $c_j + \pi \in [\pi, 2\pi]$.
- Se $f(x) = c \in R$ per ogni $x \in [a, b]$ allora $S_n = c \cdot (b - a)$ per ogni n e dunque

$$\int_a^b c \, dx = c \cdot (b - a).$$

- **Funzione di Dirichlet**: Si consideri infatti la funzione di Dirichlet definita in *[0, 1]* da:

$$d(x) = \begin{cases} 1 & \text{se } x \in \mathbb{Q} \cap [0,1]\,, \\ 0 & \text{se } x \in (\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}) \cap [0,1] \end{cases}$$

Per questa funzione non si può definire l'integrale di Riemann. Si può costruire una successione di somme di Riemann $\{S^{(1)}_n\}$ scegliendo sempre i punti c_j razionali ($S^{(1)}_n = 1$ per ogni n); se ne può costruire un'altra, $\{S^{(2)}_n\}$ in cui i punti c_j sono sempre irrazionali ($S^{(2)}_n = 0$ per ogni n).
Il limite che dovrebbe definire l'integrale dipenderebbe dalla scelta dei punti!!

Proprietà dell'integrale

<u>*Teoremi:*</u>

• Siano *f, g : [a, b] → R* due funzioni *continue.* Allora:

$$\begin{aligned} \int_a^b \Big(f(x)+g(x)\Big)\,dx &= \int_a^b f(x)\,dx + \int_a^b g(x)\,dx \\ \int_a^b cf(x)\,dx &= c\int_a^b f(x)\,dx\,, \quad c\in\mathbb{R} \\ f\le g &\Rightarrow \int_a^b f(x)\,dx \le \int_a^b g(x)\,dx \\ \int_a^b f(x)\,dx &= \int_a^c f(x)\,dx + \int_c^b f(x)\,dx\,, \quad c\in[a,b] \end{aligned}$$

- Le prime due formule qui esprimono la **linearità dell'integrale**. La terza è la **proprietà di monotonìa;** la quarta è la proprietà di **additività** rispetto all'intervallo di integrazione.

• **Media integrale**: Sia *f : [a, b] → R* una funzione continua*.* Allora esiste un punto *c ∈ [a, b]* tale che:

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx = f(c)$$

Teoremi del calcolo integrale

Proposizioni e teoremi:

- Sia $I \subset R$ un intervallo e $f : I \to R$ una funzione; una funzione derivabile $F : I \to R$ è detta una ***primitiva*** *di* f se $F' = f$ in I.

-**Primitive**: Sia $I \subset R$ un intervallo e $f : I \to R$ una funzione. Allora:

- se F è una primitiva di f allora anche $F + C$ è una primitiva di f, per $C \in R$;
- se $F1$ e $F2$ sono due primitive di f allora esse differiscono per una costante: esiste $C \in R$ tale che $F1 - F2 = C$.

- **Primo teorema fondamentale del calcolo integrale:** Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua e F una sua primitiva. Allora:

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a)$$

Esempi:

- $\int_0^\pi \sin x \, dx = [-\cos x]_0^\pi = 2$; geometricamente, l'area compresa tra la funzione seno e l'asse delle x, per $x \in [0, \pi]$, vale 2.

- $\int_0^1 x^2 \, dx = [x^3/3]_0^1 = 1/3$; l'area della regione di piano compresa tra la parabola $y = x^2$ e l'asse x, per $x \in [0, 1]$, è $1/3$.

Il calcolo delle primitive (1)

➢ Indicheremo: $\int f(x)\,dx$ **l'insieme di tutte le primitive** di *f.*

$\int_a^b f(x)\,dx \longrightarrow$ integrale definito $\qquad \int f(x)\,dx \longrightarrow$ integrale indefinito

- Dalle proprietà di linearità segue che per $\alpha, \beta \in R$ si ha:

$$\int (\alpha f(x) + \beta g(x))\; dx = \alpha \int f(x)\, dx + \beta \int g(x)\, dx$$

- L' **integrazione per parti** è la conseguenza della formula di derivazione di un prodotto di funzioni. Se *f e g* sono due funzioni di classe *C1* in un intervallo *I* allora $(fg)' = f'g + fg'$; dunque *fg* è *primitiva di* $f'g + fg'$, *cioè* $f(x)g(x) = \int (f'(x)g(x) + f(x)g'(x))dx$.

$$\int f(x)g'(x)\,dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)\,dx$$ $\longrightarrow$ per l'integrale indefinito

$$\int_a^b f(x)g'(x)\,dx = \left[f(x)g(x)\right]_a^b - \int_a^b f'(x)g(x)\,dx$$ $\longrightarrow$ per l'integrale definito

Il calcolo delle primitive (2)

- L' **integrazione per sostituzione** è dedotta dalla formula di derivazione delle funzioni composte. Sia *f : [a, b] → R* una funzione continua, *F* una sua primitiva, *ϕ : [c, d] → [a, b] una funzione invertibile* di classe C^1 in *[c, d];*

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_{\phi^{-1}(a)}^{\phi^{-1}(b)} f\left(\phi(t)\right)\phi'(t)\,dt\,.$$

Esplicitando *t invece di x* da *ψ(x) =t, dove ψ(x) =* $\phi^{-1}(x)$*:*

$$\int g(x)\psi'(x)\,dx = \int g\left(\phi(t)\right)\,dt\Big|_{t=\psi(x)}$$ ⟶ per l'integrale indefinito

$$\int_a^b g(x)\psi'(x)\,dx = \int_{\psi(a)}^{\psi(b)} g\left(\phi(t)\right)\,dt$$ ⟶ per l'integrale definito

Esempi:

- $\int (x^2 + 3x - 2)\,dx = x^3/3 + (3/2)x^2 - 2x + C$.

Esempi di calcolo di primitive

- Alcune frazioni possono essere integrate facilmente sommando e sottraendo una costante al numeratore:

$$\int \frac{x}{x+1}\,dx = \int \frac{x+1-1}{x+1}\,dx = \int \left(1 - \frac{1}{x+1}\right) dx = x - \log|x+1| + C$$

-∫ x sin *x dx*

$$\int x \sin x\,dx = -x\cos x + \int \cos x\,dx = -x\cos x + \sin x + C$$

-∫ *e*^{x} sin *x dx*

$$\int e^x \sin x\,dx = e^x \sin x - \int e^x \cos x\,dx$$

-$\int_1^e$ *log x/√x dx,* con integrazione per parti e prendendo come fattore finito *f(x) = log x:*

$$\int_1^e \frac{\log x}{\sqrt{x}}\,dx = 2\left[\sqrt{x}\log x\right]_1^e - 2\int_1^e \frac{1}{\sqrt{x}}\,dx = 2\sqrt{e} - 4\left[\sqrt{x}\right]_1^e = 4 - 2\sqrt{e}$$

-∫ *1/(x log x) dx,* con integrazione per sostituzione e ponendo log *x = t* (da cui 1/x dx = dt):

$$\int \frac{1}{x\log x}\,dx = \int \frac{1}{t}\,dt = \log|t| + C = \log|\log x| + C$$