Calcolo differenziale

<u>*Definizioni:*</u>

Sia $f : I \to R$ una funzione e $x, x + h \in I$. Il rapporto incrementale di f relativo ai punti $x, x + h$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h}$$

è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x+h, f(x+h)), (x, f(x))$.

Il limite per $h \to 0$, se esiste, rappresenterà il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$.

- Una funzione $f : (a, b) \to R$ è detta ***derivabile*** nel punto $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito il $\lim_{h\to 0} [f(x0+h)-f(x0)]/h$. Tale limite è la ***derivata prima*** di f nel punto x_0 e si indica:

$$\lim_{h\to 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h = f'(x_0) .$$

Una funzione è ***derivabile*** nell'intervallo (a, b) se è derivabile in ogni punto di (a, b).

In tal caso resta definita la funzione $f' : (a, b) \to R$, detta ***derivata*** di f.

- Se una funzione *f è derivabile* nel punto x_0, allora f è *continua* in x_0.

Esempi di derivate (1)

Esempi:

- La derivata di una funzione costante è 0. Infatti se $f(x) = c$ allora $\lim_{h\to 0} (c-c)/h = 0$.
- $Dx = 1$. Infatti $\lim_{h\to 0} (x+h-x)/h = 1$.
- $Dx^2 = 2x$. Infatti $\lim_{h\to 0} (2xh+h^2)/h = 2x+h \to 2x$.
- Generalizzando, si ha: se $\alpha \in R$ e $x > 0$, allora $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. Infatti se $h \to 0$

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{x^\alpha}{h}\left(\left(1+\frac{h}{x}\right)^\alpha - 1\right) \sim \frac{x^\alpha}{h}\alpha\frac{h}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

- $D\sin x = \cos x$. Infatti se $h \to 0$

$$\frac{\sin(x+h)-\sin x}{h} = \frac{\sin x\cos h + \sin h\cos x - \sin x}{h} = \sin x\frac{\cos h - 1}{h} + \cos x\frac{\sin h}{h} \to \cos x$$

- Analogamente si ha $D\cos x = -\sin x$.

Esempi di derivate (2)

Esempi:

- *$De^x = e^x$.* Infatti se h→ 0

$$\frac{e^{x+h}-e^x}{h} = e^x\frac{e^h-1}{h} \to e^x$$

- *$D\log x = 1/x$.* Infatti se h →0

$$\frac{\log(x+h)-\log x}{h} = \frac{\log(1+\frac{h}{x})}{h} \sim \frac{h}{x}\frac{1}{h} = \frac{1}{x}$$

- Se *f* è *derivabile* allora *$(cf)' = cf'$* per ogni costante *$c \in R$.* Basta infatti fattorizzare la costante c nel rapporto incrementale.

Definizione:

Sia *$f : (a, b) \to R$* una *funzione derivabile nel punto $x_0 \in (a, b)$.* La retta tangente al grafico di *f nel punto* $(x_0, f(x_0))$ è la *retta di equazione:*

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La funzione *f'* associa ad ogni *$x \in (a, b)$* il coefficiente angolare (la pendenza) della retta tangente al grafico della funzione nel punto (x, f(x)). Tale retta è unica (proprietà di unicità del limite).

Derivate n-esime

Il **procedimento di derivazione può essere iterato**: ottenuta la funzione *f′* possiamo considerare il limite del rapporto incrementale di *f′.*
Se tale limite esiste finito lo si definisce ***derivata seconda di f nel punto*** $\boldsymbol{x_0}$ *(notazione f′′(x0))*

Più in generale si definisce la ***derivata n-esima*** $\boldsymbol{f^{(n)}(x_0)}$*.*

Esempi:

- $D^2x^3 = D(Dx^3) = D(3x^2) = 6x$; $D^2 \log x = -1/x^2$; $D^3x^2 = 0$.
- $D^4 \sin x = \sin x$, $D^4 \cos x = \cos x$.
- $D^n e^x = e^x$ per ogni $n \in N$.
- $D^n x^n = D^{n-1}((n-1)x^{n-1}) = \ldots = n!$ per ogni $n \in N$.

Definizione:

Una funzione $f : (a, b) \to R$ è detta derivabile a destra nel punto $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito il $\lim_{h\to 0+} [f(x + h) - f(x)]/h$; tale limite è la derivata destra di *f* nel punto x_0 e si indica
$f'_+(x_0)$. Analogamente si definisce la derivata sinistra $f'_-(x_0)$.

Punti di non derivabilità

- **Punti angolosi:** almeno una delle derivate destra o sinistra è finita.

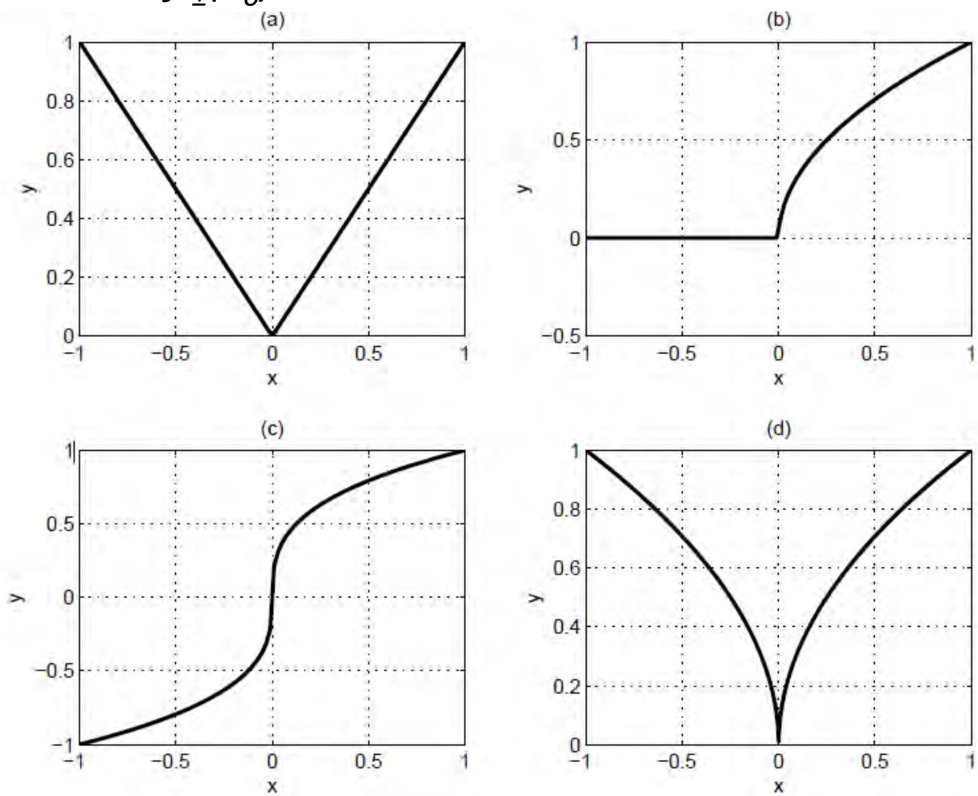
  $f'_{\pm}(x_0) \in R,\ f'_{+}(x_0) \neq f'_{-}(x_0)$ *oppure* $f'_{+}(x_0) \in R,\ f'_{-}(x_0) = \pm\infty$ o $f'_{-}(x_0) \in R,\ f'_{+}(x_0) = \pm\infty$

- **Punti a tangente verticale:** entrambe le derivate destra e sinistra sono infinite.

  $f'_{\pm}(x_0) = +\infty$ *oppure* $f'_{\pm}(x_0) = -\infty$ *e* $f'_{\pm}(x_0) = \pm\infty$ *o* $f'_{\pm}(x_0) = \mp\infty$

Le funzioni considerate in figura sono tutte continue ma non derivabili. Pertanto,

$$f \text{ derivabile } \underset{\not\Leftarrow}{\Rightarrow} f \text{ continua}$$



Il calcolo delle derivate

Operazioni fondamentali:

• Siano *f, g : (a, b) → R* due funzioni derivabili in *(a, b).* Allora anche *f ±g, f · g e f/g (se g ≠ 0)* sono ***derivabili*** in *(a, b)* e

$$\begin{aligned} (f \pm g)' &= f' \pm g', \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g', \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2} \end{aligned}$$

• Siano *f e g* due funzioni e supponiamo che esista la funzione composta *g ◦ f* in un intorno di un punto *x.* Se *f* è derivabile nel punto *x* e *g* derivabile nel punto *f(x)* allora ***(g ◦ f) è derivabile*** nel punto *x* e

$$(g \circ f)'(x) = g'\Big(f(x)\Big) \cdot f'(x)$$

N.B.: La formula precedente si generalizza al caso della composizione di più funzioni:

$$[h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esempi di calcolo delle derivate

Esempi:

- $De^{2x} = 2e^{2x}$. Infatti $f(x) = 2x$, $g(y) = e^y$.
- $D\sin(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x$. Infatti $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin y$. Inoltre $D\sin^2 x = 2 \sin x \cdot \cos x$, prendendo $f(x) = \sin x$, $g(y) = y^2$.
- $D\log |x| = 1/x$. Infatti se $x > 0$ allora $D\log |x| = D\log x = 1/x$, se $x < 0$ allora $D\log |x| = D\log(-x) = -1/(-x) = 1/x$.

N.B.: $\left[f\left(g(x) - h(x)\right)\right]' = f'\left(g(x) - h(x)\right) \cdot \left(g'(x) - h'(x)\right)$ e $\left[f\left(\frac{1}{g(x)}\right)\right]' = -f'\left(\frac{1}{g(x)}\right) \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)}$

- $Da^x = a^x \log a$, $a > 0$. Infatti $Da^x = De^{x \log a} = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$.
  - Più in generale le uniche funzioni che coincidono con le proprie derivate sono le funzioni ce^x, per $c \in R$.
- $D\sinh(x) = \cosh(x)$, $D\cosh(x) = \sinh(x)$. Infatti $De^{-x} = -e^{-x}$.
- $Dx^x = x^x(\log x + 1)$. Infatti $x^x = e^{x \log x}$ e si applica la derivazione di una funzione composta

N.B.:

$$\left[f(x)^{g(x)}\right]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \log f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x)\right)$$