

Calcolo differenziale

Definizioni:

Sia $f : I \rightarrow R$ una funzione e $x, x + h \in I$. Il rapporto incrementale di f relativo ai punti $x, x + h$

$$\frac{f(x + h) - f(x)}{h}$$

è il coefficiente angolare della retta passante per i punti $(x+h, f(x+h)), (x, f(x))$.

Il limite per $h \rightarrow 0$, se esiste, rappresenterà il coefficiente angolare della retta tangente al grafico di f nel punto $(x, f(x))$.

- Una funzione $f : (a, b) \rightarrow R$ è detta **derivabile** nel punto $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito il $\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0+h) - f(x_0)]/h$. Tale limite è la **derivata prima** di f nel punto x_0 e si indica:

$$\lim_{h \rightarrow 0} [f(x_0 + h) - f(x_0)]/h = f'(x_0).$$

Una funzione è **derivabile** nell'intervallo (a, b) se è derivabile in ogni punto di (a, b) .

In tal caso resta definita la funzione $f' : (a, b) \rightarrow R$, detta **derivata** di f .

- Se una funzione f è **derivabile** nel punto x_0 , allora f è **continua** in x_0 .

Esempi di derivate (1)

Esempi:

- La derivata di una funzione costante è 0. Infatti se $f(x) = c$ allora $\lim_{h \rightarrow 0} (c-c)/h = 0$.
- $Dx = 1$. Infatti $\lim_{h \rightarrow 0} (x+h-x)/h = 1$.
- $Dx^2 = 2x$. Infatti $\lim_{h \rightarrow 0} (2xh+h^2)/h = 2x+h \rightarrow 2x$.
- Generalizzando, si ha: se $\alpha \in \mathbb{R}$ e $x > 0$, allora $Dx^\alpha = \alpha x^{\alpha-1}$. Infatti se $h \rightarrow 0$

$$\frac{f(x+h) - f(x)}{h} = \frac{(x+h)^\alpha - x^\alpha}{h} = \frac{x^\alpha}{h} \left(\left(1 + \frac{h}{x}\right)^\alpha - 1 \right) \sim \frac{x^\alpha}{h} \alpha \frac{h}{x} = \alpha x^{\alpha-1}$$

- $D \sin x = \cos x$. Infatti se $h \rightarrow 0$

$$\frac{\sin(x+h) - \sin x}{h} = \frac{\sin x \cos h + \sin h \cos x - \sin x}{h} = \sin x \frac{\cos h - 1}{h} + \cos x \frac{\sin h}{h} \rightarrow \cos x$$

- Analogamente si ha $D \cos x = -\sin x$.

Esempi di derivate (2)

Esempi:

- $D e^x = e^x$. Infatti se $h \rightarrow 0$

$$\frac{e^{x+h} - e^x}{h} = e^x \frac{e^h - 1}{h} \rightarrow e^x$$

- $D \log x = 1/x$. Infatti se $h \rightarrow 0$

$$\frac{\log(x+h) - \log x}{h} = \frac{\log(1 + \frac{h}{x})}{h} \sim \frac{h \frac{1}{x}}{h} = \frac{1}{x}$$

- Se f è derivabile allora $(cf)' = cf'$ per ogni costante $c \in \mathbb{R}$. Basta infatti fattorizzare la costante c nel rapporto incrementale.

Definizione:

Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile nel punto $x_0 \in (a, b)$. La retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è la retta di equazione:

$$y = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

La funzione f' associa ad ogni $x \in (a, b)$ il coefficiente angolare (la pendenza) della retta tangente al grafico della funzione nel punto $(x, f(x))$. Tale retta è unica (proprietà di unicità del limite).

Derivate n-esime

Il **procedimento di derivazione può essere iterato**: ottenuta la funzione f' possiamo considerare il limite del rapporto incrementale di f' .

Se tale limite esiste finito lo si definisce **derivata seconda di f nel punto x_0** (notazione $f''(x_0)$)

Più in generale si definisce la **derivata n-esima $f^{(n)}(x_0)$** .

Esempi:

- $D^2x^3 = D(Dx^3) = D(3x^2) = 6x$; $D^2 \log x = -1/x^2$; $D^3x^2 = 0$.
- $D^4 \sin x = \sin x$, $D^4 \cos x = \cos x$.
- $D^n e^x = e^x$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.
- $D^n x^n = D^{n-1}((n-1)x^{n-1}) = \dots = n!$ per ogni $n \in \mathbb{N}$.

Definizione:

Una funzione $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ è detta derivabile a destra nel punto $x_0 \in (a, b)$ se esiste finito il $\lim_{h \rightarrow 0^+} [f(x+h) - f(x)]/h$; tale limite è la derivata destra di f nel punto x_0 e si indica

$f'_+(x_0)$. Analogamente si definisce la derivata sinistra $f'_-(x_0)$.

Punti di non derivabilità

- **Punti angolosi:** almeno una delle derivate destra o sinistra è finita.

$$f'_{\pm}(x_0) \in \mathbb{R}, f'_{+}(x_0) \neq f'_{-}(x_0) \text{ oppure } f'_{+}(x_0) \in \mathbb{R}, f'_{-}(x_0) = \pm\infty \text{ o } f'_{-}(x_0) \in \mathbb{R}, f'_{+}(x_0) = \pm\infty$$

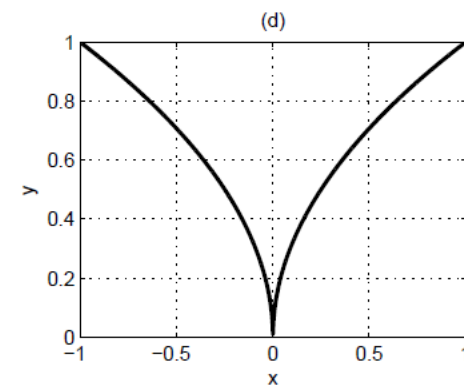
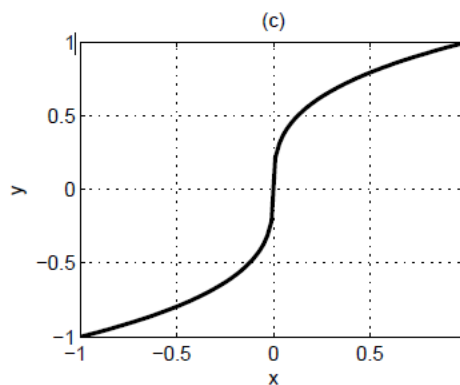
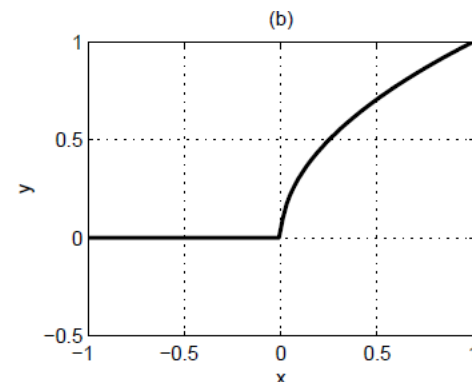
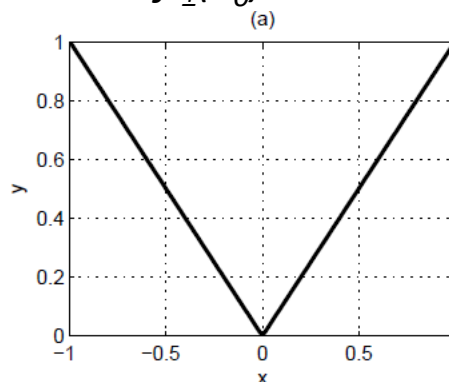
- **Punti a tangente verticale:** entrambe le derivate destra e sinistra sono infinite.

$$f'_{\pm}(x_0) = +\infty \text{ oppure } f'_{\pm}(x_0) = -\infty \text{ e } f'_{\pm}(x_0) = \pm\infty \text{ o } f'_{\pm}(x_0) = \mp\infty$$

Le funzioni considerate in figura sono tutte continue ma non derivabili.

Pertanto,

$$f \text{ derivabile} \not\Rightarrow f \text{ continua}$$



Il calcolo delle derivate

Operazioni fondamentali:

- Siano $f, g : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ due funzioni derivabili in (a, b) . Allora anche $f \pm g$, $f \cdot g$ e f/g (se $g \neq 0$) sono **derivabili** in (a, b) e

$$\begin{aligned}(f \pm g)' &= f' \pm g', \\ (f \cdot g)' &= f' \cdot g + f \cdot g', \\ \left(\frac{f}{g}\right)' &= \frac{f' \cdot g - f \cdot g'}{g^2}\end{aligned}$$

- Siano f e g due funzioni e supponiamo che esista la funzione composta $g \circ f$ in un intorno di un punto x . Se f è derivabile nel punto x e g derivabile nel punto $f(x)$ allora **$(g \circ f)$ è derivabile** nel punto x e

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

N.B.: La formula precedente si generalizza al caso della composizione di più funzioni:

$$[h(g(f(x)))]' = h'(g(f(x))) \cdot g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Esempi di calcolo delle derivate

Esempi:

- $D e^{2x} = 2e^{2x}$. Infatti $f(x) = 2x$, $g(y) = e^y$.
- $D \sin(x^2) = \cos(x^2) \cdot 2x$. Infatti $f(x) = x^2$, $g(y) = \sin y$. Inoltre $D \sin^2 x = 2 \sin x \cdot \cos x$, prendendo $f(x) = \sin x$, $g(y) = y^2$.
- $D \log |x| = 1/x$. Infatti se $x > 0$ allora $D \log |x| = D \log x = 1/x$, se $x < 0$ allora $D \log |x| = D \log(-x) = -1/(-x) = 1/x$.

N.B.:
$$\left[f(g(x) - h(x)) \right]' = f'(g(x) - h(x)) \cdot (g'(x) - h'(x)) \quad \text{e} \quad \left[f\left(\frac{1}{g(x)}\right) \right]' = -f'\left(\frac{1}{g(x)}\right) \cdot \frac{g'(x)}{g^2(x)}$$

- $D a^x = a^x \log a$, $a > 0$. Infatti $D a^x = D e^{x \log a} = e^{x \log a} \cdot \log a = a^x \log a$.
- Più in generale le uniche funzioni che coincidono con le proprie derivate sono le funzioni ce^x , per $c \in \mathbb{R}$.
- $D \sinh(x) = \cosh(x)$, $D \cosh(x) = \sinh(x)$. Infatti $D e^{-x} = -e^{-x}$.
- $D x^x = x^x(\log x + 1)$. Infatti $x^x = e^{x \log x}$ e si applica la derivazione di una funzione composta

N.B.:
$$\left[f(x)^{g(x)} \right]' = f(x)^{g(x)} \cdot \left(g'(x) \log f(x) + \frac{g(x)}{f(x)} f'(x) \right)$$