Infiniti ed infinitesimi

Definizioni:

- Per $x \to +\infty$ le seguenti funzioni sono ***infinite di ordine crescente:***

$$\log_b x,\ x^\alpha,\ a^x \text{ per } b > 1,\ \alpha > 0,\ a > 1$$

  - In modo equivalente, per $b > 1$, $\alpha > 0$, $a > 1$ si ha $\lim_{x\to+\infty} (\log_b x)/x^\alpha = 0$, $\lim_{x\to+\infty} x^\alpha/a^x = 0$
  - Enunciato per gli infinitesimi

Esempi:

- $\lim_{x\to+\infty} \log x/\sqrt{x} = 0$
- $\lim_{x\to+\infty} e^x/x^2 = +\infty$
- $\lim_{x\to 0+} x \log x = 0$
- $\lim_{x\to 0+} x^x = 1$. Infatti $x^x = e^{x \log x}$

$\lim_{x\to 0+} xe^{1/x} = +\infty$. Infatti $\lim_{x\to 0+} xe^{1/x} = \lim_{y\to +\infty} e^y/y = +\infty$.

Asintoti

Definizione:

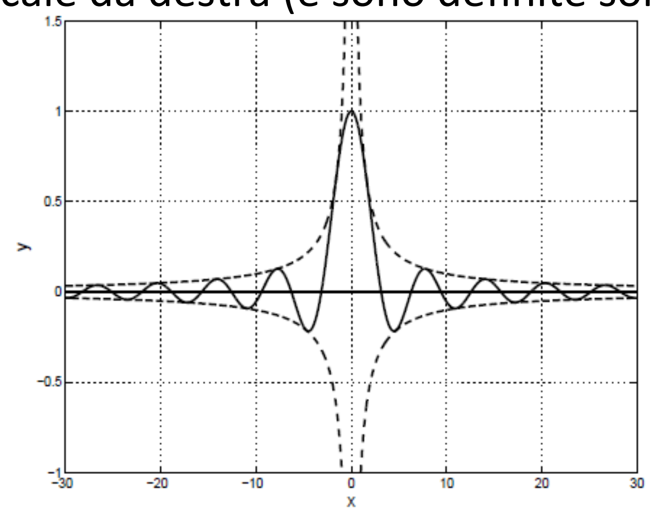
• Per La retta $x = x_0$ è un ***asintoto verticale*** *da destra (risp. da sinistra)* per la funzione f se $\lim_{x \to x_0+} f(x) = \pm\infty$ (risp. $\lim_{x \to x_0-} f(x) = \pm\infty$).
La retta $y = l$ è un **asintoto orizzontale** a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per la funzione f *se* $\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$ (risp. $\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$).

Esempi:

- La funzione $1/x$ ha come asintoto verticale (da destra e da sinistra) la retta $x = 0$, come asintoto orizzontale (a $\pm\infty$) la retta y = 0.

- Le funzioni log x, $1/\sqrt{x}$ hanno in 0 un asintoto verticale da destra (e sono definite solo per $x > 0$).

- Il grafico di una funzione può intersecare un suo asintoto orizzontale in più punti: la funzione $f(x) = \sin x/x$ ha un asintoto orizzontale $y = 0$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$ ⟶

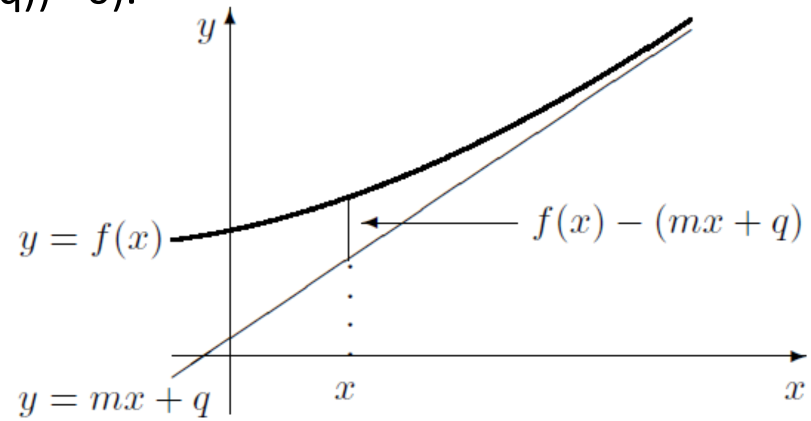


Asintoti obliqui

Definizioni:

- La retta $y = mx + q$ è ***un asintoto obliquo*** a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per la funzione *f se* $\lim_{x\to+\infty}(f(x) - (mx + q)) = 0$ (risp. $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (mx + q)) = 0$).

Geometricamente l'esistenza di un asintoto obliquo esprime il fatto che la distanza $f(x)-(mx + q)$ tra il grafico della funzione f e la retta $y = mx + q$ *è infinitesima* per $x \to \pm\infty$



Proposizione:

- Si ha:

$$\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x) - (mx+q)\Big) = 0 \iff \begin{cases} \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\frac{f(x)}{x} = m, \\ \displaystyle\lim_{x\to+\infty}\Big(f(x) - mx\Big) = q \end{cases}$$

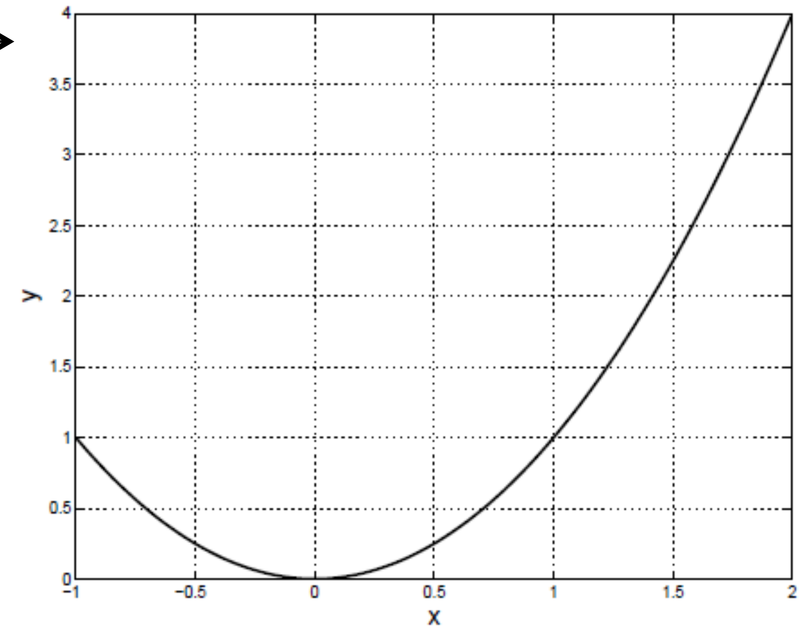
- Analogamente per il caso $\lim_{x\to-\infty}(f(x) - (mx + q)) = 0$

Punti di massimo e minimo

<u>*Definizione:*</u>

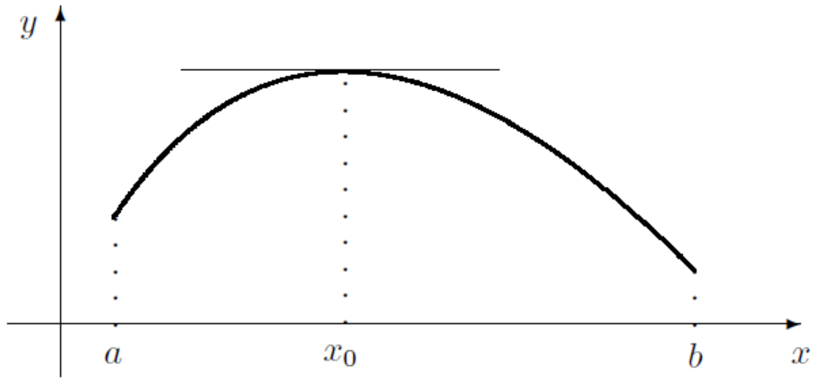
\- Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione. Un punto $x_0 \in [a, b]$ è detto punto di ***massimo* assoluto** se $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$; il valore $f(x_0)$ è il ***massimo assoluto***. Un punto $x_0 \in [a, b]$ è detto punto di ***massimo relativo*** *o* ***locale*** se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$; il valore $f(x_0)$ è un ***massimo relativo***.
Analogamente si definiscono i punti di **minimo assoluto, relativo** e i relativi valori.

- Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ in $[-1, 2]$. ⟶
Il punto 2 è punto di massimo assoluto (con massimo assoluto 4), il punto −1 è punto di massimo locale (massimo locale 1); il punto 0 è punto di minimo assoluto (con minimo assoluto 0).



\- **Fermat:** Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione derivabile in (a, b). Se $x_0 \in (a, b)$ è punto di massimo o di minimo relativo, allora $f'(x_0) = 0$.

Punti stazionari

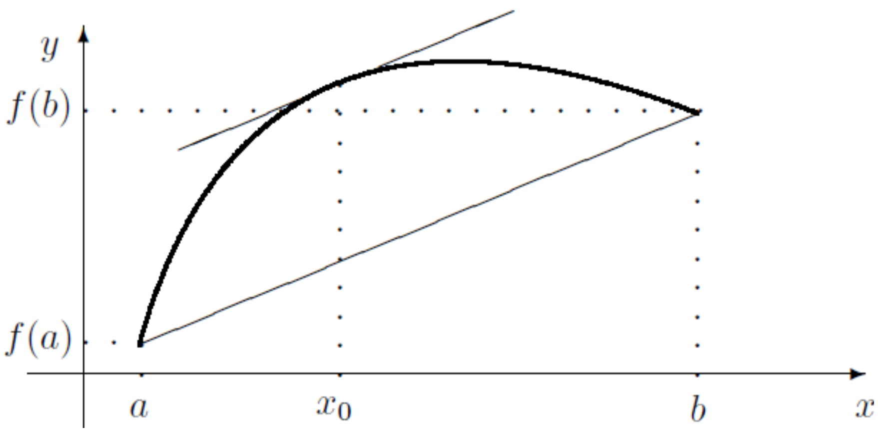


- Geometricamente se x_0 *è* un punto di massimo o di minimo interno allora la tangente al grafico di *f* nel punto *$(x_0, f(x_0))$* è orizzontale.

- I punti in cui la derivata di una funzione si annulla sono detti **punti stazionari**.

- **Lagrange**: Sia *$f : [a, b] \to R$* una funzione continua in *[a, b]* e derivabile in *(a, b). Allora esiste $x_0 \in (a, b)$* tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$



- Geometricamente esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta passante per i punti *$(a, f(a)),(b, f(b))$.*
Naturalmente vi possono essere più punti in cui la derivata di *f* uguaglia *$(f(b)-f(a))/b-a$.*

Monotonìa

- **Caratterizzazione della monotonìa:** Sia $f : (a, b) \to R$ una funzione derivabile. Allora:

$$f \text{ crescente} \Leftarrow\!\Rightarrow f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$
$$f \text{ decrescente} \Leftarrow\!\Rightarrow f'(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

- Sia $f : (a, b) \to R$ una funzione derivabile. Allora:

$$f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a, b) \Leftarrow\!\Rightarrow f \text{ costante}$$

- Sia $f : [a, b) \to$ R una funzione. Supponiamo che f sia continua in $[a, b)$ e derivabile in (a,b); supponiamo inoltre che esista il $\lim_{x\to a} f'(x) = m \in R^*$. Allora vale che $f'_+(a) = m$.

<u>*Esempio:*</u>

- Consideriamo la funzione f definita in $[0,+\infty)$ da:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x \text{ se } x > 0 \\ 0 \text{ se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è continua in $[0,+\infty)$ e derivabile in $(0,+\infty)$ con $f'(x) = 2x \log x + x$.
Poiché $\lim_{x\to 0} f'(x) = 0$, f è *derivabile da destra* in 0 con derivata nulla.

Punti estremi, concavità e convessità

• Sia infatti *f : [a, b] → R;* eventuali *punti estremi* saranno da ricercarsi tra:

- i punti ***a e b;***
- i punti di ***non derivabilità;***
- i punti ***stazionari.***

• Sia $x_0 \in (a, b)$ *punto stazionario* di una funzione *f* derivabile in *(a, b);* allora:

- se *f'* cambia di segno in x_0 allora x_0 è *punto di massimo (minimo)* se il cambiamento è $+ \to -$ *(risp.* $- \to +$*);*
- se *f'* non cambia di segno in x_0 allora x_0 non è un punto estremo.

N.B.: Gli estremi assoluti vengono poi determinati dal confronto degli estremi locali.

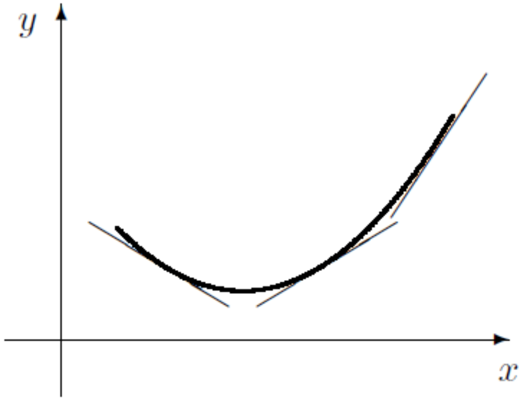
• Sia $f : (a, b) \to R$ una funzione *derivabile* due volte. Allora:

$$f' \text{ crescente} \iff f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$
$$f' \text{ decrescente} \iff f''(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

• Sia *I* un intervallo aperto, $f : I \to R$ una funzione *due volte derivabile, (a, b)* un intervallo $\subset$ in *I.* La funzione *f* è ***convessa (concava)*** in *(a, b) se* $f''(x) \geq 0$ $(f''(x) \leq 0)$ per ogni $x \in (a, b)$. *Un punto* $x_0 \in I$ in cui la funzione da *concava* diventa *convessa* (o viceversa) è detto punto di **flesso**.

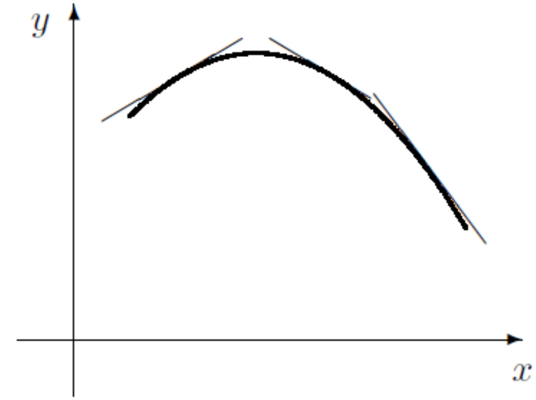
- *f* è *convessa (concava)* se e soltanto se le pendenze delle rette tangenti al grafico di *f crescono (decrescono)* al *crescere delle ascisse.*

Concavità e convessità



← Ipotesi di convessità

Ipotesi di concavità →



• **Convessità per tangenti e corde:** Sia $f : (a, b) \rightarrow R$ una funzione *derivabile* due volte. Allora le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

i. f è *convessa (concava)* in (a, b);

ii. per ogni $x_0 \in (a, b)$ il grafico di f sta al di sopra (sotto) della retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$;

iii. per ogni coppia di punti $x_1 < x_2$ in (a, b), il grafico di f sta al di sotto (sopra) del segmento che congiunge i punti $(x1, f(x1)), (x2, f(x2))$in [x1, x2].

• Sia $f : (a, b) \rightarrow R$ una funzione derivabile due volte, $x_0 \in (a, b)$.
Se x_0 è un punto di flesso allora $f''(x0) = 0$.

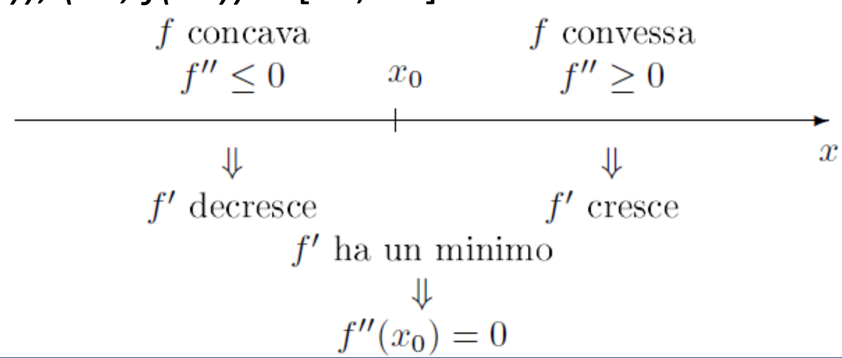


Grafico di una funzione

- Sia $f : (a, b) \to R$ una funzione derivabile due volte, $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario.

Allora:

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di massimo locale}$$
$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo locale}$$

➢ Studio del <u>grafico di una funzione:</u>

- Determinazione del dominio se non specificato; segno ed eventuali zeri della funzione.
- Limiti in punti significativi ed eventuali asintoti.
- Studio della monotonìa e dei punti stazionari con la derivata prima. Punti di non derivabilità.
- Analisi dei punti stazionari con la derivata seconda; estremi assoluti. Studio di eventuali punti di flesso.

<u>Esempio:</u>

- Studiare la funzione $f(x) = x+1/x-1$

Il dominio di f è R \ {1}; in tale dominio f è derivabile infinite volte.
$\lim_{x\to 1\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = 1$ → $x = 1$ è un asintoto verticale e $y = 1$ un asintoto orizzontale a $\pm\infty$. $f'(x) = -2/(x-1)^2$ →la funzione è decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1,+\infty)$. $f''(x) = 4/(x-1)^3$ → f è concava in $(-\infty, 1)$ e convessa in $(1,+\infty)$. La funzione non ha né massimi né minimi.