

Infiniti ed infinitesimi

Definizioni:

- Per $x \rightarrow +\infty$ le seguenti funzioni sono **infinite di ordine crescente**:

$$\log_b x, x^\alpha, a^x \text{ per } b > 1, \alpha > 0, a > 1$$

- In modo equivalente, per $b > 1, \alpha > 0, a > 1$ si ha $\lim_{x \rightarrow +\infty} (\log_b x)/x^\alpha = 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^\alpha/a^x = 0$
- Enunciato per gli infinitesimi

Esempi:

- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \log x/\sqrt{x} = 0$
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x/x^2 = +\infty$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x \log x = 0$
- $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^x = 1$. Infatti $x^x = e^{x \log x}$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = +\infty. \text{ Infatti } \lim_{x \rightarrow 0^+} x e^{1/x} = \lim_{y \rightarrow +\infty} e^y/y = +\infty.$$

Asintoti

Definizione:

• Per La retta $x = x_0$ è un **asintoto verticale** da destra (risp. da sinistra) per la funzione f se $\lim_{x \rightarrow x_0^+} f(x) = \pm\infty$ (risp. $\lim_{x \rightarrow x_0^-} f(x) = \pm\infty$).

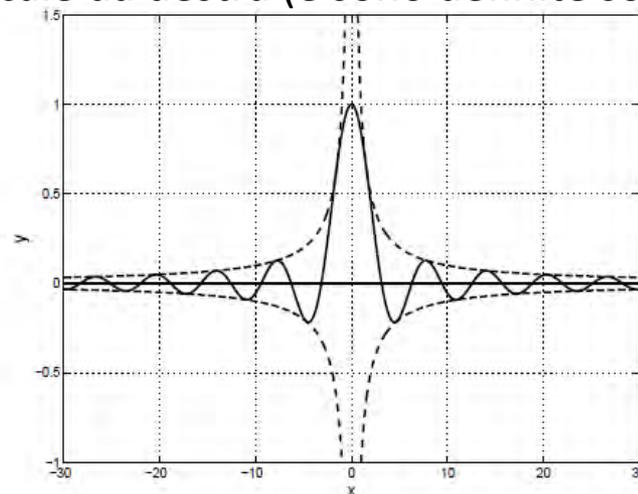
La retta $y = l$ è un **asintoto orizzontale** a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per la funzione f se $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = l$ (risp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = l$).

Esempi:

- La funzione $1/x$ ha come asintoto verticale (da destra e da sinistra) la retta $x = 0$, come asintoto orizzontale (a $\pm\infty$) la retta $y = 0$.

- Le funzioni $\log x$, $1/\sqrt{x}$ hanno in 0 un asintoto verticale da destra (e sono definite solo per $x > 0$).

- Il grafico di una funzione può intersecare un suo asintoto orizzontale in più punti: la funzione $f(x) = \sin x/x$ ha un asintoto orizzontale $y = 0$ sia a $+\infty$ che a $-\infty$

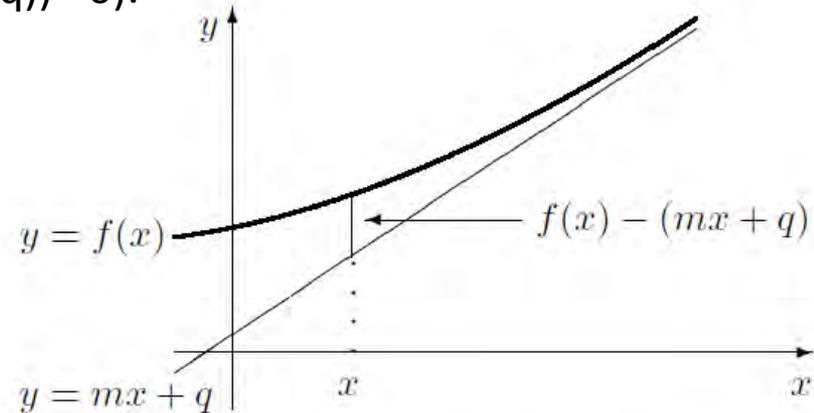


Asintoti obliqui

Definizioni:

- La retta $y = mx + q$ è **un asintoto obliquo** a $+\infty$ (risp. $-\infty$) per la funzione f se $\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$ (risp. $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$).

Geometricamente l'esistenza di un asintoto obliquo esprime il fatto che la distanza $f(x) - (mx + q)$ tra il grafico della funzione f e la retta $y = mx + q$ è *infinitesima* per $x \rightarrow \pm\infty$



Proposizione:

- Si ha:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0 \iff \begin{cases} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{f(x)}{x} = m, \\ \lim_{x \rightarrow +\infty} (f(x) - mx) = q \end{cases}$$

- Analogamente per il caso $\lim_{x \rightarrow -\infty} (f(x) - (mx + q)) = 0$

Punti di massimo e minimo

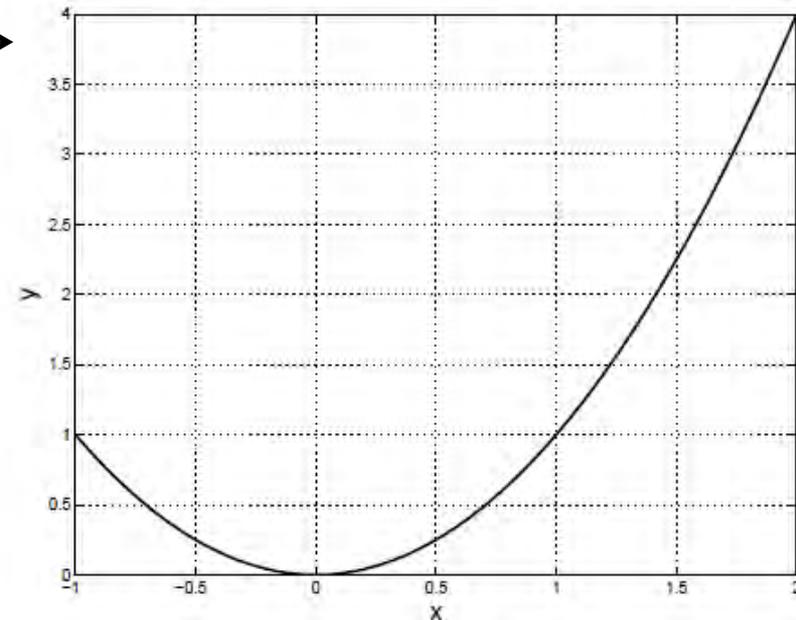
Definizione:

- Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Un punto $x_0 \in [a, b]$ è detto punto di **massimo assoluto** se $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in [a, b]$; il valore $f(x_0)$ è il **massimo assoluto**. Un punto $x_0 \in [a, b]$ è detto punto di **massimo relativo o locale** se esiste $\delta > 0$ tale che $f(x_0) \geq f(x)$ per ogni $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta) \cap [a, b]$; il valore $f(x_0)$ è un **massimo relativo**.

Analogamente si definiscono i punti di **minimo assoluto, relativo** e i relativi valori.

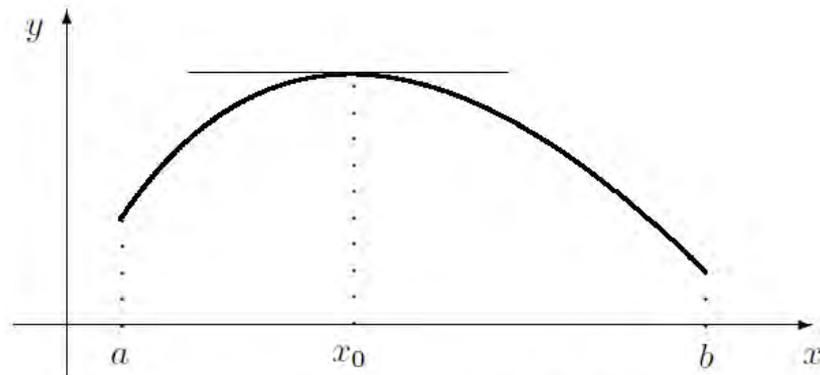
- Consideriamo la funzione $f(x) = x^2$ in $[-1, 2]$. \longrightarrow
Il punto 2 è punto di massimo assoluto (con massimo assoluto 4), il punto -1 è punto di massimo locale (massimo locale 1); il punto 0 è punto di minimo assoluto (con minimo assoluto 0).

- **Fermat:** Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile in (a, b) . Se $x_0 \in (a, b)$ è punto di massimo o di minimo relativo, allora $f'(x_0) = 0$.



Punti stazionari

- Geometricamente se x_0 è un punto di massimo o di minimo interno allora la tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è orizzontale.



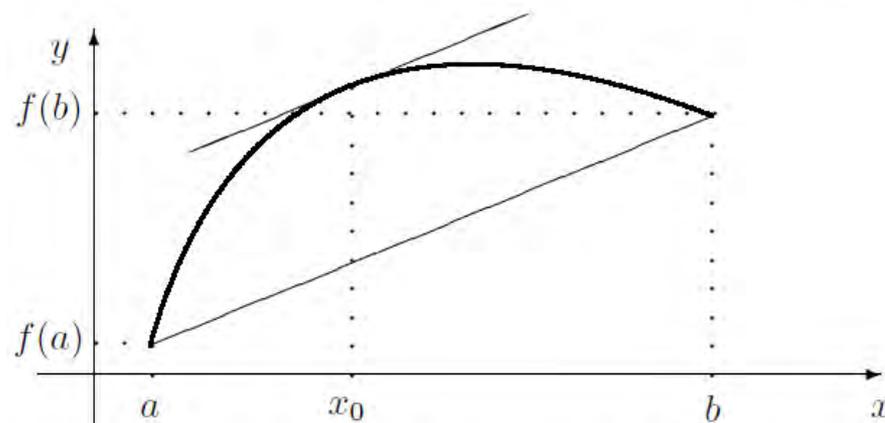
- I punti in cui la derivata di una funzione si annulla sono detti **punti stazionari**.

- **Lagrange**: Sia $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione continua in $[a, b]$ e derivabile in (a, b) . Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che:

$$\frac{f(b) - f(a)}{b - a} = f'(x_0)$$

- Geometricamente esiste un punto $x_0 \in (a, b)$ tale che la retta tangente al grafico di f nel punto $(x_0, f(x_0))$ è parallela alla retta passante per i punti $(a, f(a)), (b, f(b))$.

Naturalmente vi possono essere più punti in cui la derivata di f uguaglia $(f(b) - f(a)) / (b - a)$.



Monotonìa

- **Caratterizzazione della monotonìa:** Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora:

$$f \text{ crescente} \iff f'(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

$$f \text{ decrescente} \iff f'(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

- Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile. Allora:

$$f'(x) = 0 \text{ per ogni } x \in (a, b) \iff f \text{ costante}$$

- Sia $f : [a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione. Supponiamo che f sia continua in $[a, b)$ e derivabile in (a, b) ; supponiamo inoltre che esista il $\lim_{x \rightarrow a^+} f'(x) = m \in \mathbb{R}^*$. Allora vale che $f'_+(a) = m$.

Esempio:

- Consideriamo la funzione f definita in $[0, +\infty)$ da:

$$f(x) = \begin{cases} x^2 \log x & \text{se } x > 0 \\ 0 & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

La funzione f è continua in $[0, +\infty)$ e derivabile in $(0, +\infty)$ con $f'(x) = 2x \log x + x$.

Poiché $\lim_{x \rightarrow 0^+} f'(x) = 0$, f è derivabile da destra in 0 con derivata nulla.

Punti estremi, concavità e convessità

- Sia infatti $f : [a, b] \rightarrow R$; eventuali *punti estremi* saranno da ricercarsi tra:
 - i punti ***a e b***;
 - i punti di ***non derivabilità***;
 - i punti ***stazionari***.
- Sia $x_0 \in (a, b)$ *punto stazionario* di una funzione f derivabile in (a, b) ; allora:
 - se f' cambia di segno in x_0 allora x_0 è *punto di massimo (minimo)* se il cambiamento è $+ \rightarrow -$ (risp. $- \rightarrow +$);
 - se f' non cambia di segno in x_0 allora x_0 non è un punto estremo.

N.B.: Gli estremi assoluti vengono poi determinati dal confronto degli estremi locali.

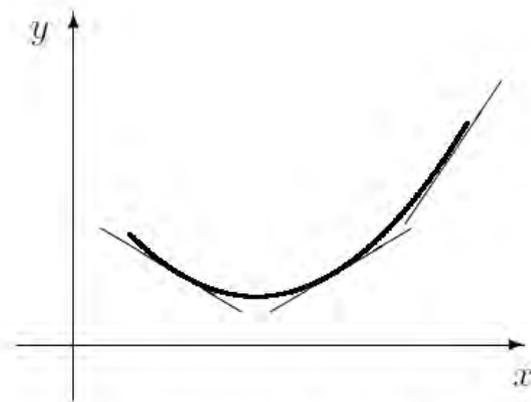
- Sia $f : (a, b) \rightarrow R$ una funzione *derivabile* due volte. Allora:

$$f' \text{ crescente} \iff f''(x) \geq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

$$f' \text{ decrescente} \iff f''(x) \leq 0 \text{ per ogni } x \in (a, b)$$

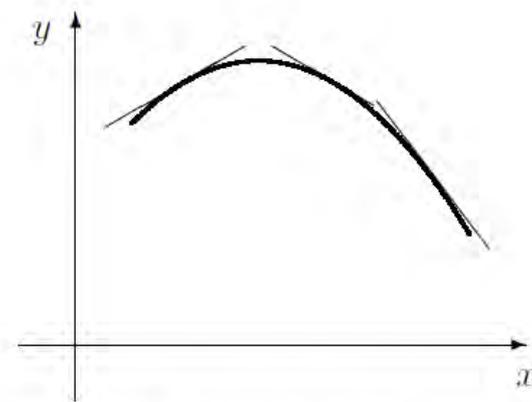
- Sia I un intervallo aperto, $f : I \rightarrow R$ una funzione *due volte derivabile*, (a, b) un intervallo \subset in I . La funzione f è ***convessa (concava)*** in (a, b) se $f''(x) \geq 0$ ($f''(x) \leq 0$) per ogni $x \in (a, b)$. Un punto $x_0 \in I$ in cui la funzione da *concava* diventa *convessa* (o viceversa) è detto punto di ***flesso***.
 - f è *convessa (concava)* se e soltanto se le pendenze delle rette tangenti al grafico di f *crescono (decregono)* al *crescere delle ascisse*.

Concavità e convessità



← Ipotesi di convessità

Ipotesi di concavità →



• **Convessità per tangenti e corde:** Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione *derivabile* due volte. Allora le seguenti tre affermazioni sono equivalenti:

- i. f è *convessa (concava)* in (a, b) ;
- ii. per ogni $x_0 \in (a, b)$ il grafico di f sta al di sopra (sotto) della retta tangente al grafico nel punto $(x_0, f(x_0))$;
- iii. per ogni coppia di punti $x_1 < x_2$ in (a, b) , il grafico di f sta al di sotto (sopra) del segmento che congiunge i punti $(x_1, f(x_1))$, $(x_2, f(x_2))$ in $[x_1, x_2]$.

• Sia $f : (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, $x_0 \in (a, b)$.

Se x_0 è un punto di flesso allora $f''(x_0) = 0$.

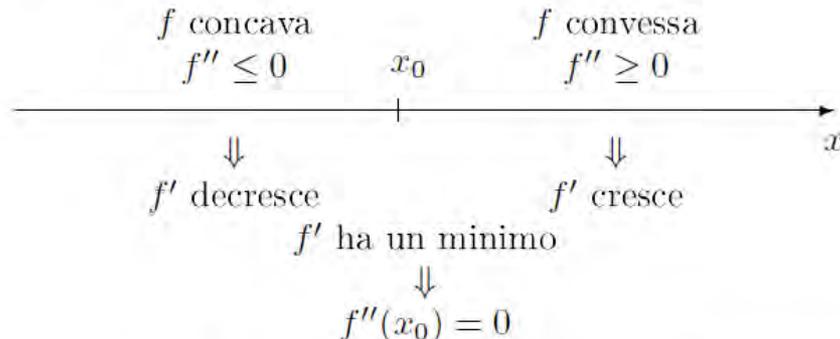


Grafico di una funzione

- Sia $f: (a, b) \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione derivabile due volte, $x_0 \in (a, b)$ un punto stazionario.

Allora:

$$f''(x_0) < 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di massimo locale}$$

$$f''(x_0) > 0 \Rightarrow x_0 \text{ punto di minimo locale}$$

➤ Studio del grafico di una funzione:

- Determinazione del dominio se non specificato; segno ed eventuali zeri della funzione.
- Limiti in punti significativi ed eventuali asintoti.
- Studio della monotonia e dei punti stazionari con la derivata prima. Punti di non derivabilità.
- Analisi dei punti stazionari con la derivata seconda; estremi assoluti. Studio di eventuali punti di flesso.

Esempio:

- Studiare la funzione $f(x) = x+1/x-1$

Il dominio di f è $\mathbb{R} \setminus \{1\}$; in tale dominio f è derivabile infinite volte.

$\lim_{x \rightarrow 1^\pm} f(x) = \pm\infty$, $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = 1 \rightarrow x = 1$ è un asintoto verticale e $y = 1$ un asintoto orizzontale a $\pm\infty$. $f'(x) = -2/(x-1)^2 \rightarrow$ la funzione è decrescente in $(-\infty, 1)$ e in $(1, +\infty)$. $f''(x) = 4/(x-1)^3 \rightarrow f$ è concava in $(-\infty, 1)$ e convessa in $(1, +\infty)$. La funzione non ha né massimi né minimi.