Le funzioni continue (1)

Definizioni:

- Sia *I* un intervallo, $x_0 \in I$. Una funzione $f : I \rightarrow R$ è ***continua*** *in* x_0 *se* $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$. La funzione *f è* ***continua nell'intervallo*** *I* se è continua in ogni punto di I.

-Una funzione non continua si dice **discontinua**

-La funzione *f è* ***continua a destra*** *(risp. a sinistra)* in x_0 *se* $\lim_{x \to x_0+} f(x) = f(x_0)$ *(risp.* $\lim_{x \to x_0-} f(x) = f(x_0)$*).*

Osservazioni:

• Una funzione continua in x_0 *deve necessariamente essere definita nel punto* x_0 mentre nella definizione di limite di una funzione questo non è necessario.

• Se *f* è continua in x_0, il limite $\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ si esplicita così: per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che, per ogni $x \in I$,

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon .$$

• La continuità nel punto x_0 *si può scrivere anche* $\lim_{h \to 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$, come si verifica immediatamente dalla definizione di limite.

Le funzioni continue (2)

<u>Osservazioni:</u>

- Se f è definita in un intervallo $I = [a, b]$ e $x_0 = a$ *il limite si riduce al limite destro*; in tal caso, nel punto a la continuità è equivalente alla continuità a destra.
Il caso $x_0 = b$ *è analogo (continuità a sinistra).*

- Ogni funzione costante $f(x) = c$ *con* $c \in R$ è continua (nel suo dominio*):* il numero $\delta > 0$ può essere scelto arbitrariamente.

- Ogni funzione lineare affine $f(x) = ax + b$, *con* $a, b \in R$, $a \neq 0$, è continua.

- Le funzioni potenza x^α, con $\alpha \in R \setminus \{0\}$ sono continue nel loro dominio.

- Le funzioni logaritmiche $\log_b x$, con $0 < b \neq 1$ sono continue nel loro dominio $\{x > 0\}$.

- Le funzioni esponenziali a^x sono continue nel loro dominio R.

- Le funzioni $1/x$, $1/x^2$ sono continue nel loro dominio naturale $R \setminus \{0\}$.

Proprietà delle funzioni continue

- Se f e g sono funzioni continue in un intorno del punto x_0, allora anche $f \pm g$, $f \cdot g$, f/g *(se* $g(x_0) \neq 0$*) sono continue in* x_0.

- Supponiamo che la funzione composta $g \circ f$ *sia definita in un* intorno di x_0, *con* f continua in x_0 e g continua *in* $y_0 = f(x_0)$. Allora la funzione composta $g \circ f$ è continua in x_0.

- Sia $f : (a, b) \to R$ una funzione continua e supponiamo che esista finito il $\lim_{x\to a+} f(x) = l$. Si dice allora che f *è* ***prolungabile per continuità*** *all'intervallo [a, b) o* in a e

$$\bar{f}(x) = \begin{cases} f(x) & se\ x \in (a, b) \\ l & se\ x = a \end{cases}$$

è il suo *prolungamento.*

<u>*Esempi:*</u>

- Le tre funzioni:

$$f(x) = \sin\frac{1}{x}, \quad g(x) = \frac{1}{x}, \quad h(x) = x\sin\frac{1}{x}$$

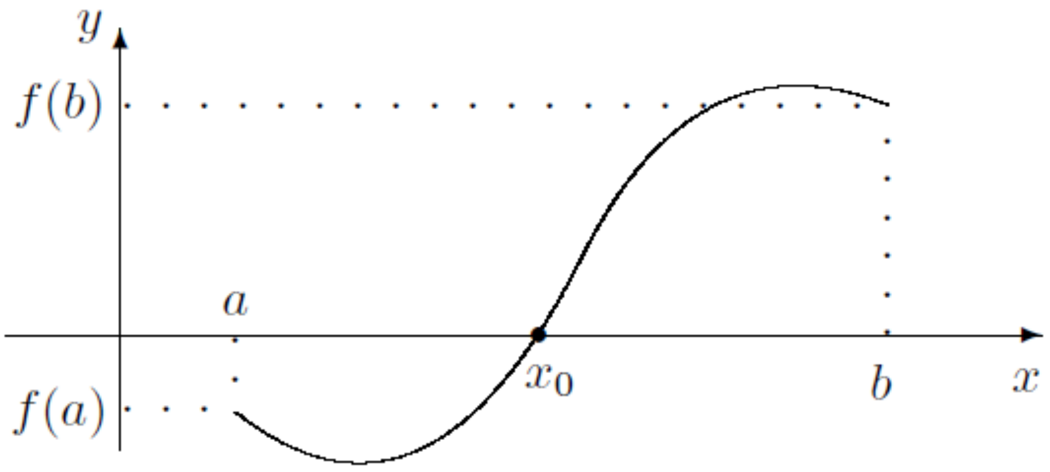
sono definite in R\ {0} e in tale insieme sono continue

- La funzione $f(x) = \sin x/x$, definita in $R \setminus \{0\}$, è prolungabile con continuità a R ponendo $\bar{f}(0) = 1$.

Teoremi delle funzioni continue (1)

1. **Zeri di funzioni continue**: Sia $f : [a, b] \to R$ una funzione continua e supponiamo che $f(a) < 0 < f(b)$ oppure $f(b) < 0 < f(a)$. Allora esiste $x_0 \in (a, b)$ tale che $f(x_0) = 0$.

-Il massimo (minimo) di una funzione $f : I \to R$ *è il massimo (minimo) dell'immagine* $f(I)$.
Ciò vuol dire che esiste $x_1 \in I$, detto punto di *massimo,* tale che $f(x_1) \geq f(x)$ per ogni $x \in I$; il numero $f(x_1)$ è *il massimo* o *valore massimo* di f *in* I.
Nel caso di *minimo* la definizione è analoga ($f(x_2) \leq f(x)$ per ogni $x \in I$).



Teoremi delle funzioni continue (2)

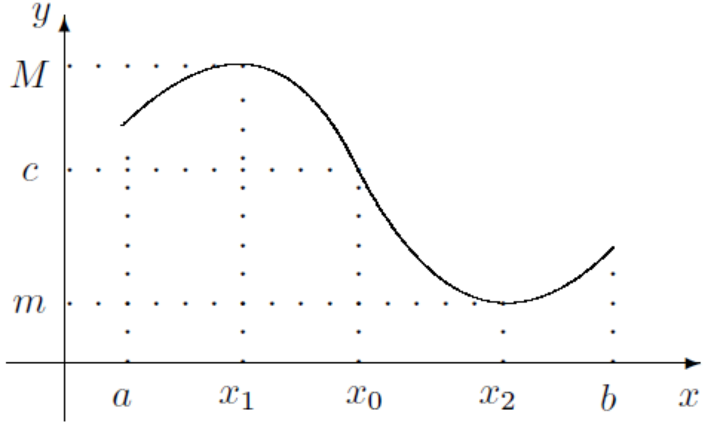
2. **Weierstrass:** Sia *f : [a, b] → R* una funzione continua; allora f ha *massimo* e *minimo*.

-Conseguenza del Teorema di Weierstrass è che una funzione continua *f : [a, b] → R è* anche limitata; indicati con *m, M* il *minimo e il massimo* di *f* si ha:

$$m \leq f(x) \leq M \qquad \text{per ogni } x \in [a, b].$$

Ovviamente una funzione può essere limitata in [a, b] senza essere continua

3. **Valori intermedi:** Sia *f : [a, b] → R* una funzione continua, con massimo *M* e minimo *m.*
   Allora, per ogni $c \in [m,M]$ esiste $x_0 \in [a, b]$ tale che $f(x_0) = c$.



4. **Continuità della funzione inversa:** Sia : *I → R* una funzione continua. Allora:

   f strettamente monotona ⇐⇒ f invertibile

   In tal caso anche la funzione inversa f^{-1} è *continua.*

Esempi di funzioni continue

<u>Esempi:</u>

- Si consideri il polinomio $p(x) = x^3 + ax^2 + bx + c$. Poiché $\lim_{x\to\pm\infty} p(x) = \pm\infty$, ne segue che esiste un intervallo $[-K,K]$ tale che $p(x) < 0$ se $x \leq -K$ e $p(x) > 0$ se $x \geq K$.
Dai teoremi precedenti tale polinomio ha almeno uno zero nell'intervallo $[-K,K]$.

- La funzione $f(x) = \sin x$ in $[0, 4\pi]$ soddisfa le ipotesi del teorema di Weierstrass; essa ha massimo 1, minimo −1. Si noti che, mentre i massimi (minimi) sono unici, il Teorema di Weierstrass non garantisce però l'unicità dei punti di massimo; vi sono due punti di massimo $(\pi/2, 5\pi/2)$ e due punti di minimo $(3\pi/2, 7\pi/2)$.

- I punti di massimo possono essere interni all'intervallo $[a, b]$, cioè appartenenti a (a, b) (si pensi alla funzione $\sin x$ in $[0, 2\pi]$) o coincidere con uno degli estremi (si pensi alle funzioni $\arcsin x$ o $\arccos x$ in $[-1, 1]$).

- Nel Teorema di Weierstrass sono racchiuse tre ipotesi: la continuità di f e il fatto che essa sia definita in un intervallo chiuso e limitato.
Nessuna di queste ipotesi può essere omessa.