Successioni (1)

__Definizioni:__

• Una successione di numeri reali è una corrispondenza che associa ad ogni numero naturale n un unico numero reale a_n: $n \to a_n$. L'insieme dei valori a_n, $n = 0, 1, 2, \ldots$ *della* successione è indicato enumerativamente $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$, o in maniera più compatta come $\{a_n\}$.

• Una successione $\{a_n\}$ è limitata se esistono due numeri reali m, M tali che $m \leq a_n \leq M$ per ogni $n \in N$, ***limitata superiormente*** se $a_n \leq M$, ***limitata inferiormente*** *se* $a_n \geq m$, per ogni $n \in N$.

• Una successione $\{a_n\}$ soddisfa definitivamente una proprietà se esiste un numero naturale N tale che la proprietà sia verificata dai termini a_n con $n \geq N$.

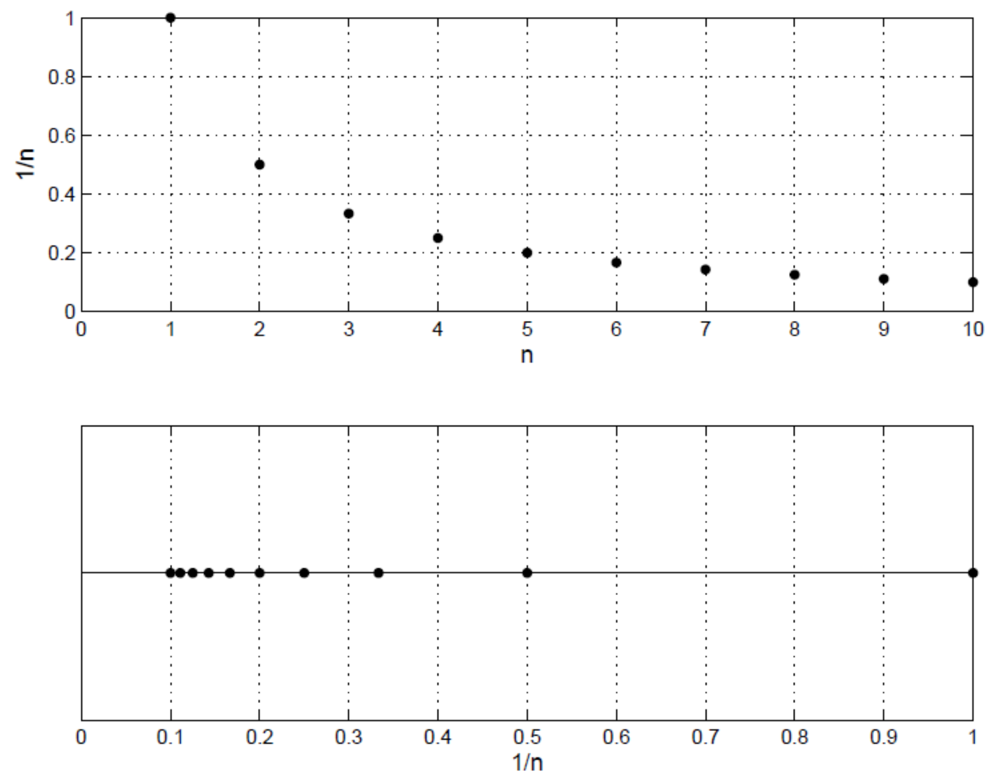
Successioni (2)

<u>Esempi:</u>

1. Le successioni $a_n = n^2$, $a_n = (-1)^n$ sono definite per $n \geq 0$, la successione $a_n = 1/n$ per $n \geq 1$, $an = 1/n(n-1)$ per $n \geq 2$.

Graficamente le successioni si possono rappresentare su un piano, riportando le coppie (n, a_n), *o* più semplicemente su una retta, riportando i soli valori a_n, $n \in N$.

Due rappresentazioni dei primi dieci termini della successione $\{1/n\}$.



Successioni (3)

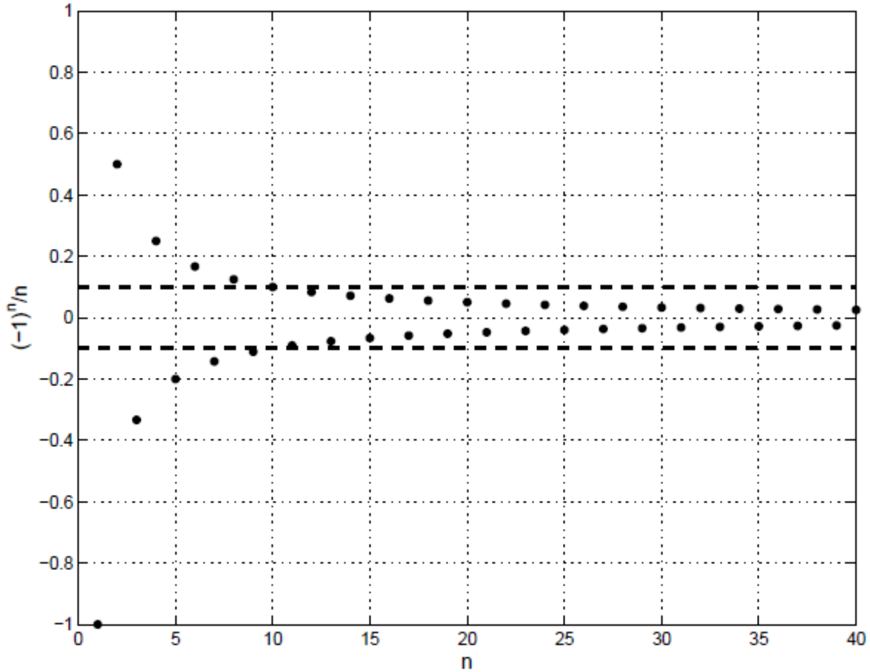
Esempi:

2. Le successioni: $\{1/n\}$, $\{(-1)^n\}$ sono ***limitate***, $\{n^2\}$ è ***limitata inferiormente*** *ma* non superiormente, $\{-n\}$ è ***limitata superiormente*** ma non inferiormente, $\{(-1)^n n\}$ non è limitata né superiormente né inferiormente.

3. La successione $\{n^2 - 10n\}$ è definitivamente maggiore o uguale a 0 $(N = 10)$; $1/n \leq 1/100$ definitivamente (N = 100); la successione $\{(-2)^n\}$ non è definitivamente positiva.

N.B.: Il numero N potrà essere scelto **reale** invece che naturale

Esempio di successione convergente



Limiti di successioni (1)

Definizioni:

• Una successione $\{a_n\}$ è detta ***convergente*** se esiste un numero reale $\boldsymbol{l}$ per cui vale che: per ogni $\epsilon > 0$ esiste un numero N tale che $|a_n - l| \leq \epsilon$ per ogni $n \geq N$.

N.B.: Graficamente una successione convergente ha punti (n, a_n) definitivamente compresi in una striscia orizzontale di ordinate $l - \epsilon$, $l + \epsilon$

• La disuguaglianza $|a_n - l| \leq \epsilon$ *in (2.1)* può essere sostituita con $|a_n - l| \leq C\epsilon$.
Più precisamente $\lim_{n\to\infty} a_n = l$ se e solo se esiste $C > 0$ tale che per ogni $\epsilon > 0$ esiste N tale che $|a_n - l| \leq C\epsilon$ per ogni $n \geq N$.

• Ogni successione ***convergente*** è ***limitata***.

• Una successione $\{a_n\}$ ***diverge*** *a* $+\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste un numero N tale che $a_n \geq M$ per ogni $n \geq N$. In tal caso si dice che la successione $\{a_n\}$ ha limite $+\infty$, in simboli $\lim_{n\to\infty} a_n = +\infty$ *oppure* $a_n \to +\infty$ per $n \to \infty$.
Analogamente $\{a_n\}$ ***diverge*** a $-\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste N tale che $a_n \leq -M$ per ogni $n \geq N$, in simboli $\lim_{n\to\infty} a_n = -\infty$, *oppure* $a_n \to -\infty$ per $n \to \infty$.

Limiti di successioni (2)

Definizioni:

• Una successione è detta ***infinitesima*** se ha limite 0. Una successione è detta ***infinita*** se ha limite $+\infty$ *o* $-\infty$.

• Una successione è detta indeterminata o irregolare se non è convergente né divergente

• La successione geometrica di ragione q $\in$ R è la successione $\{q^n\}$, dedotta dalla progressione geometrica relativa

• Una successione $\{a_n\}$ è detta ***crescente (decrescente)*** se $a_n \leq a_{n+1}$ (risp. se $a_n \geq a_{n+1}$) per ogni $n \in N$. Una successione $\{a_n\}$ è detta **strettamente crescente (strettamente decrescente)** se $a_n < a_{n+1}$ (risp. se $a_n > a_{n+1}$) per ogni $n \in N$.
Queste successioni sono dette ***monotòne (strettamente monotòne)***.

Ogni successione monotona $\{a_n\}$ ha ***limite***. Più precisamente:

$$\{a_n\} \text{ crescente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \sup\{a_n : n \in N\},$$
$$\{a_n\} \text{ decrescente} \Rightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = \inf\{a_n : n \in N\}.$$

Limiti di successioni (3)

Esempi:

- Se $c \in R$ e $a_n = c$ per ogni $n \in N$, allora $\lim_{n\to\infty} a_n = c$. *(Si prenda N=0)*

- $\lim_{n\to\infty} 1/n = 0$.*(Si prenda $N = 1/\epsilon$)*

- $\lim_{n\to\infty} (n-1)/(n+1)=1$.

- $\lim_{n\to\infty} 2^{1/n} = 1$. *(Infatti, $1 - \epsilon \leq 2^{1/n} \leq 1 + \epsilon$)*

- La successione $\{n^2\}$ ***non può essere convergente****:* non è limitata (superiormente).

- Vi sono successioni ***limitate ma non convergenti***, ad esempio la successione $\{(-1)^n\}$.
  Essa è limitata: $-1 \leq (-1)^n \leq 1$

- E' facile provare che:

$$\lim_{n\to\infty} a_n = a \quad \overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = |a|,$$
$$\lim_{n\to\infty} a_n = 0 \quad \Leftarrow \quad \lim_{n\to\infty} |a_n| = 0.$$

- $\lim_{n\to\infty} n^2 = +\infty$. *(Si prenda $N = \sqrt{M}$)*

$\lim_{n\to\infty} \log n = +\infty$. *(Si prenda $N = e^M$)* e $\lim_{n\to\infty} (-\sqrt{n}) = -\infty$. *(Si prenda $N = M^2$)*