Proprietà dei limiti (1)

Teoremi:

- **Permanenza del segno:**

Sia f una funzione definita in un intorno di x_0, si ha che:

(i) se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $f(x) \geq 0$ definitivamente per $x \to x_0$, allora $l \geq 0$;

(ii) viceversa, se $\lim_{x \to x_0} f(x) = l$ e $l > 0$, allora $f(x) > 0$ definitivamente per $x \to x_0$

- **Confronto:**

Siano f, g, h tre funzioni definite in un intorno di x_0, *con* $f(x) \leq g(x) \leq h(x)$ *definitivamente per* $x \to x_0$. *Allora per* $x \to x_0$, $f(x) \to l$, $h(x) \to l \Rightarrow g(x) \to l$.

Proposizioni:

1. Sia A un sottoinsieme di R^m, sia x_0 un punto d'accumulazione per A e siano $f, g : A \to R$ funzioni tali che

$$\exists \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L, \qquad \exists \lim_{\mathbf{x} \to \mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M, \qquad \text{con } L, M \in R$$

- $\lim_{x \to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
- $\lim_{x \to x_0} [f(x) * g(x)] = L * M$

Proprietà dei limiti (2)

- $se\ M \neq 0, \lim_{x \to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Nei casi in cui L, oppure M, o entrambi, valgono 0 e $\pm\infty$, possono verificarsi forme indeterminate del tipo $+\infty - \infty$, $0\cdot(\pm\infty)$, 0/0, ∞/∞.

2. Se $g(x) \to l_g$ per $x \to x_0$, allora:
a) Se *f* è limitata inferiormente e $l_g = +\infty$, allora $(f(x) + g(x)) \to +\infty$;
b) Se *f* è limitata superiormente e $l_g = -\infty$, allora $(f(x) + g(x)) \to -\infty$;
c) Se *f* è limitata e $l_g = 0$, allora $(f(x) \cdot g(x)) \to 0$

3. Se $g(x) \to l$ per $x \to x_0$, allora:

a) Se $l = +\infty$ allora $1/g(x) \to 0^+$;

b) Se $l = -\infty$ allora $1/g(x) \to 0^-$;

c) Se $l \in R \setminus \{0\}$ allora $1/g(x) \to 1/l$;

d) Se $l = 0^+$ allora $1/g(x) \to +\infty$; se $l = 0^-$ allora $1/g(x) \to -\infty$

Proprietà dei limiti (3)

4. Se $f(x) \to l_f$ e $g(x) \to l_g$ per $x \to x_0$, allora:

a) Se $l_f \in R$ e $l_g \in R \setminus \{0\}$ allora $f(x)/g(x) \to l_f/l_g$;
b) Se $l_f \in R$ e $l_g = \pm\infty$ allora $f(x)/g(x) \to 0$
c) Se $l_f \in R^+$ e $l_g = 0^\pm$ allora $f(x)/g(x) \to \pm\infty$;
d) Se $l_f \in R^-$ e $l_g = 0^\pm$ allora $f(x)/g(x) \to \mp\infty$;
e) Se $l_f = \pm\infty$ e $l_g \in R^+ \cup \{0^+\}$ allora $f(x)/g(x) \to \pm\infty$;
f) Se $l_f = \pm\infty$ e $l_g \in R^- \cup \{0^-\}$ allora $f(x)/g(x) \to \mp\infty$

<u>Operazioni indeterminate sui limiti :</u>

$+\infty - \infty$ $\qquad 0 \cdot \infty$ $\qquad \frac{0}{0}$ $\qquad \frac{\infty}{\infty}$

∞^0 $\qquad 0^0$ $\qquad 1^\infty$

Limiti notevoli (1)

Limiti notevoli:

Limiti all'infinito di polinomi

Il comportamento all'infinito di un polinomio è stabilito dal suo termine di grado massimo.

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, *con* $a_n \neq 0$, *è un polinomio* di grado n, *allora:*

$$p(x) \sim a_n x^n \text{ per } x \to \pm\infty$$

Pertanto, $\lim\limits_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim\limits_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1 + x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

Limiti notevoli (2)

$$\lim_{x\to 0^+} \log x = -\infty \qquad \lim_{x\to +\infty} \log x = +\infty \qquad \lim_{x\to \pm\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x\to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

- Se q>0:

$$\lim_{x\to +\infty} q^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0^+ & \text{se } 0<q<1 \end{cases} \qquad \lim_{x\to -\infty} q^x = \begin{cases} 0^+ & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ +\infty & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$$

- Se β ∈ R:

$$\lim_{x\to +\infty} x^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta>0 \\ 1 & \text{se } \beta=1 \\ 0^+ & \text{se } \beta<0 \end{cases}$$

Limiti di funzioni esp. e log.

- Se $\beta \in R$ e $q > 0$, con $q \neq 1$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{q^x}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 0^+ & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x\to-\infty} \frac{q^x}{|x|^\beta} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } q>1 \\ +\infty & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$$

- Se $\beta > 0$:

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^\beta}{\log x} = +\infty$$

$$\lim_{x\to 0^+} \left(x^\beta \cdot \log x\right) = 0^-$$