Proprietà dei limiti

Teoremi:

- ***Permanenza del segno:***

  Sia f una funzione definita in un intorno di x_0, si ha che:

  (i) se lim f(x) = l e f(x) ≥ 0 definitivamente per x → x_0, allora l ≥ 0;

  (ii) viceversa, se lim f(x) = l e l > 0, allora f(x) > 0 definitivamente per x → x_0

- **Confronto:**

  Siano f, g, h tre funzioni definite in un intorno di x_0, con f(x) ≤ g(x) ≤ h(x) definitivamente per x → x_0. Allora per x → x_0, f(x) → l, h(x) → l ⇒ g(x) → l .

Proposizioni:

1. Sia A un sottoinsieme di R^m , sia x0 un punto d'accumulazione per A e

   siano f, g : A R funzioni tali che

   $\exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} f(\mathbf{x}) = L, \qquad \exists \lim_{\mathbf{x}\to\mathbf{x}_0} g(\mathbf{x}) = M,$ con L, M∈R

   - $\lim_{x\to x_0} [f(x) + g(x)] = L + M$
   - $\lim_{x\to x_0} [f(x) * g(x)] = L * M$
   - $se\ M \neq 0, \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$

Nei casi in cui L, oppure M, o entrambi, valgono 0 e $\pm\infty$, possono verificarsi forme indeterminate del tipo + ∞ – ∞ , 0·(±∞), 0/0, ∞/∞.

2. Se $g(x) \to l_g$ per $x \to x_0$, allora:

a) Se *f* è limitata inferiormente e l_g = + ∞, allora $(f(x) + g(x)) \to +\infty$;

b) Se *f* è limitata superiormente e l_g = - ∞, allora $(f(x) + g(x)) \to -\infty$;

c) Se *f* è limitata e l_g = 0, allora $(f(x) \cdot g(x)) \to 0$

3. Se $g(x) \to l \text{ per } x \to x_0$, allora:

a) Se l = + ∞ allora $1/g(x) \to 0^+$;

b) Se l = - ∞ allora $1/g(x) \to 0^-$;

c) Se l $\in$ R \ {0} allora $1/g(x) \to 1/l$;

d) Se l = 0^+ allora $1/g(x) \to +\infty$; se l = 0^- allora $1/g(x) \to -\infty$.

4. Se $f(x) \to l_f$ e $g(x) \to l_g$ $per\ x \to x_0$, allora:

a) Se $l_f \in$ R e $l_g \in$ R \ {0} allora $f(x)/g(x) \to l_f/l_g$;

b) Se $l_f \in$ R e $l_g = \pm\infty$ allora $f(x)/g(x) \to 0$;

c) Se $l_f \in R^+$ e $l_g = 0^\pm$ allora $f(x)/g(x) \to \pm\infty$;

d) Se $l_f \in R^-$ e $l_g = 0^\pm$ allora $f(x)/g(x) \to \mp\infty$;

e) Se $l_f = \pm\infty$ e $l_g \in R^+$ U {0^+} allora $f(x)/g(x) \to \pm\infty$;

f) Se $l_f = \pm\infty$ e $l_g \in R^-$ U {0^-} allora $f(x)/g(x) \to \mp\infty$.

Operazioni indeterminate sui limiti:

$$+\infty - \infty \quad \frac{\infty}{\infty} \quad 0 \cdot \infty \quad \infty^0 \quad 0^0 \quad 1^\infty \quad \frac{0}{0}$$

Limiti Notevoli

Limiti all'infinito di polinomi

Il comportamento all'infinito di un polinomio è stabilito dal suo termine di grado massimo.

Se $p(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, *con* $a_n \neq 0$, *è un polinomio* di grado n, *allora:*

$$p(x) \sim a_n x^n \text{ per } x \to \pm\infty$$

Pertanto, $\lim_{x \to \pm\infty} p(x) = \lim_{x \to \pm\infty} a_n x^n$.

$$\lim_{x \to x_0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to 0} \frac{1 - \cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad \lim_{x \to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\log(1+x)}{x} = 1 \qquad \lim_{x \to -\infty} e^x = 0^+ \qquad \lim_{x \to +\infty} e^x = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \log x = -\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} \log x = +\infty \qquad \lim_{x \to \pm\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \to 0} (1+x)^{1/x} = e$$

- Se q>0:

$$\lim_{x \to +\infty} q^x = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ 0^+ & \text{se } 0<q<1 \end{cases} \qquad \lim_{x \to -\infty} q^x = \begin{cases} 0^+ & \text{se } q>1 \\ 1 & \text{se } q=1 \\ +\infty & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$$

- Se β∈R:

$$\lim_{x \to +\infty} x^\beta = \begin{cases} +\infty & \text{se } \beta>0 \\ 1 & \text{se } \beta=1 \\ 0^+ & \text{se } \beta<0 \end{cases}$$

Limiti di Funzioni esp. e log.

- Se $\beta \in R$ e $q > 0$, con $q \neq 1$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{q^x}{x^\beta} = \begin{cases} +\infty & \text{se } q>1 \\ 0^+ & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$$

$$\lim_{x \to -\infty} \frac{q^x}{|x|^\beta} = \begin{cases} 0^+ & \text{se } q>1 \\ +\infty & \text{se } 0<q<1 \end{cases}$$

- Se $\beta > 0$:

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{x^\beta}{\log x} = +\infty$$

$$\lim_{x \to 0^+} \left(x^\beta \cdot \log x\right) = 0^-$$