Introduzione alle funzioni (1)

Definizioni:

-Una ***funzione f*** è una corrispondenza fra due insiemi *X* e *Y*, che associa ***ad ogni*** elemento *x* di ***X*** uno e un solo elemento di ***Y***, che viene indicato con ***f(x)***:

$f : X \longrightarrow Y$, *f è definita su X, a valori in Y*

- L'insieme X è il ***dominio*** di f;
- Il ***codominio*** di f `e il sottoinsieme f(X) di Y costituito da tutti i punti di Y che sono ***immagini*** mediante f di punti di X;

-Il ***grafico*** di una funzione è il sottoinsieme del prodotto cartesiano $X \times Y$ costituito da tutte le coppie della forma $(x, f(x))$, cioè da tutte e sole le coppie (x, y) che risolvono l'equazione $y = f(x)$;

Introduzione alle funzioni (II)

Definizioni:

-se $f : X \longrightarrow Y$, $g : Y \longrightarrow Z$ sono funzioni, si definisce ***funzione composta***
$g \circ f : X \longrightarrow Z$,

$g \circ f(x) = g(f(x))$, per ogni $x \in X$
(occorre che: *codominio di f* $\subset$ *dominio di g*);

- Una funzione si dice ***iniettiva*** se a punti distinti vengono associate immagini distinte, ovvero se:

$$f(x) = f(x') \Rightarrow x = x'$$

Introduzione alle funzioni (III)

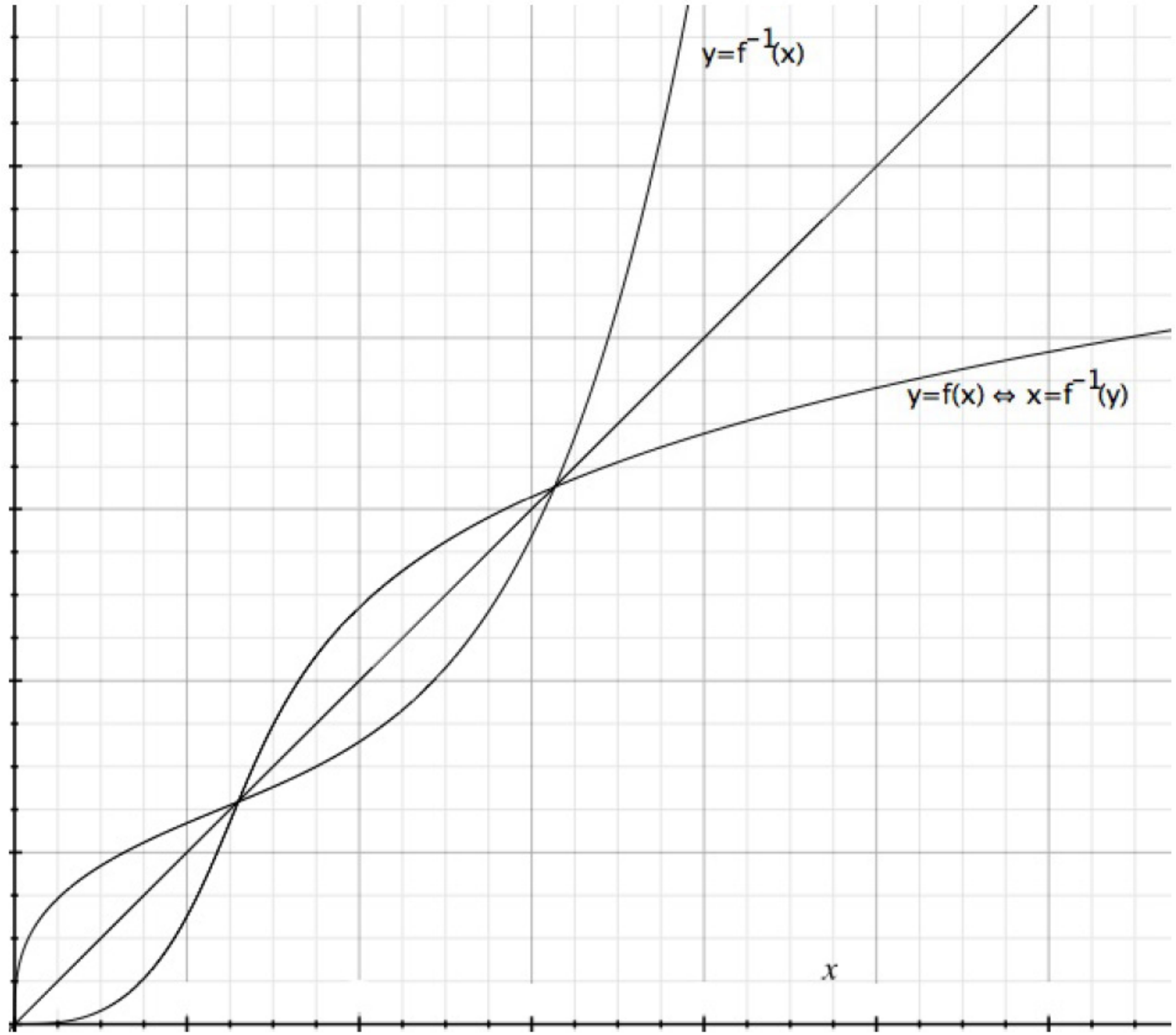
<u>*Definizioni:*</u>

-Una funzione si dice ***surgettiva*** se si ha $f(X) = Y$, cioè se ogni $y \in Y$ è
-immagine di almeno un $x \in X$;
-Una funzione si dice ***bigettiva***, o ***invertibile***, o ***biunivoca***, se è <u>sia iniettiva che surgettiva</u>: per ogni $y \in Y$ vi è un unico $x \in X$ tale che $f(x) = y$;
-la funzione ***inversa*** $\mathbf{f^{-1}}$ è definita su Y , a valori in X, e ad ogni $y \in Y$ associa quell'unico x per cui $f(x) = y$.
Si dice che f definisce una ***corrispondenza biunivoca*** fra gli insiemi X e Y.

<u>*Osservazioni:*</u>

1. Se $f : X \rightarrow X$ è una funzione invertibile e $f^{-1} : X \rightarrow X$ è la sua funzione inversa, le equazioni $y = f(x)$ e $x = f^{-1}(y)$ sono equivalenti e descrivono entrambe il grafico di f;
2. Scambiando fra loro le variabili x, y, la seconda equazione diventa $y = f^{-1}(x)$ e descrive il grafico di f^{-1}, il quale è dunque il simmetrico del grafico di f rispetto alla bisettrice del primo quadrante.

Introduzione alle funzioni



Funzioni limitate

Definizione:

- Una funzione f : D $\longrightarrow$ R è detta ***limitata*** se la sua immagine *f(D)* è limitata,
-cioè se esistono due numeri reali *m, M* tali che:

$$m \leq f(x) \leq M \text{ per ogni } x \in D$$

La funzione è *limitata superiormente* se $f(x) \leq M$, *limitata inferiormente* se $f(x) \geq m$, *per ogni* $x \in D$.

Esempi:

• La funzione x^3 *non è limitata* né inferiormente né superiormente;
• Un esempio di una funzione definita in [0, 1] ma *non limitata* è:

$$f(x) = \begin{cases} 1/x \text{ se } x \in (0, 1], \\ 0 \text{ se } x = 0 \end{cases}$$

Limiti (I)

Assunzioni:

- Si indica con *I un intervallo (non vuoto)* di R;
- Sia *f* definita in *I* \ {x_0}, dove $x_0 \in I$.

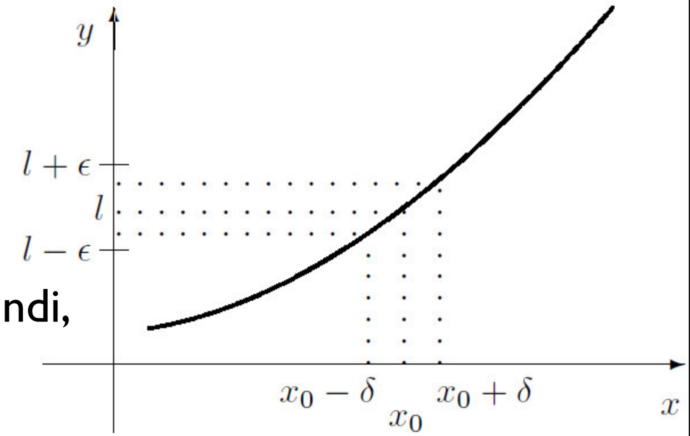
Definizioni:

Sia f una funzione definita in I \ {x_0}. Si dice che un *numero reale l* è il ***limite*** della funzione *f* per *x* che tende a x_0 se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che: per ogni $x \in I$, $x \neq x_0$ si ha che:

$$|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = l \quad oppure \quad f(x) \to l \ per \ x \to x_0$$

Si scrive allora:



- Non serve che la funzione sia definita in x_0;
- $\lim_{x \to 1} x^2 = 1$

$|x^2 - 1| \leq \epsilon$ equivale a $\sqrt{1-\epsilon} \leq x \leq \sqrt{1+\epsilon}$ quindi,

$1 - (1 - \sqrt{1-\epsilon}) \leq x \leq 1 + (\sqrt{1+\epsilon} - 1)$

Allora $\delta = min\{1 - \sqrt{1-\epsilon}, \sqrt{1+\epsilon} - 1\} = \sqrt{1+\epsilon} - 1$

Limiti (II)

<u>*Definizioni:*</u>

-Se il limite esiste, allora è unico;

- Sia I un intervallo, $x_0 \in I$, $\boldsymbol{f}$ una funzione definita in $\boldsymbol{I \setminus \{x_0\}}$. Si definisce: $\lim_{x \to x0} f(x) = +\infty$,

  se per ogni $M > 0$ esiste $\delta > 0$ tale che per ogni $x \in I, x \neq x_0$ si ha che

  $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \geq M$ $\quad$ ($\lim_{x \to x0} f(x) = -\infty$ se $|x - x_0| \leq \delta \Rightarrow f(x) \leq -M$)

- Sia $\boldsymbol{f}$ una funzione definita in $\boldsymbol{I = (a,+\infty)}$ *(risp. in $(-\infty, a)$). Si definisce:*

  $\lim_{x \to +\infty} f(x) = \boldsymbol{l}$ se per ogni $\epsilon > 0$ esiste $K > 0$ tale che per ogni $x \in I$ si ha che :

  $x \geq K \Rightarrow |f(x) - l| \leq \epsilon$

- Sia $\boldsymbol{f}$ una funzione definita in $\boldsymbol{I = (a,+\infty)}$ (risp. in $(-\infty, a)$). Si definisce:

  $\lim_{x \to +\infty}$ f(x) = $+\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $K > 0$ tale che per ogni $x \in I$ si ha che:

  $x \geq K \Rightarrow f(x) \geq M$ $\quad$ ($\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ se $x \leq -K \Rightarrow f(x) \geq M$)

-Si definisce $\lim_{x \to +\infty}$ f(x) = $-\infty$ se per ogni $M > 0$ esiste $K > 0$ tale che per ogni $x \in I$ si ha che:

$x \geq K \Rightarrow f(x) \leq -M$ $\quad$ ($\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$ se $x \leq -K \Rightarrow f(x) \leq -M$)