Gli insiemi (1)

<u>Definizioni:</u>

-Insieme ***Universo X*** e ***sottoinsiemi*** (cioè gli insiemi A contenuti in X);

-Un insieme è finito se ha un numero finito di elementi):

- se gli elementi sono "pochi", si elencano: $A = \{1, 2, 3, 4, 6, 12\}$
- se gli elementi sono "molti", si descrive la loro proprietà: $p(x)$ = "x è divisore di 12"

<u>Simbologia:</u>

-$X \in A$ significa: *x* appartiene ad *A*, ovvero *x* è un elemento di *A*;

-$A \subseteq B$, $B \supseteq A$ significano: *A* è contenuto in *B*, ovvero *B* contiene *A*, ovvero ogni elemento di *A* è anche elemento di *B*, o anche *A* è sottoinsieme di *B*;

- $A = B$ significa: *A* coincide con *B*, ovvero *A* e *B* hanno gli stessi elementi, ovvero $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$;

-$A \subset B$, $B \supset A$ significano: *A* è strettamente contenuto in *B*, ovvero *A* è sottoinsieme proprio di *B*, ovvero ogni elemento di *A* è elemento di *B* ma esiste almeno un elemento di *B* che non è elemento di *A*, ovvero $A \subseteq B$ ma *A* non coincide con *B*;

- Per negare le proprietà si mette una sbarretta sul simbolo corrispondente

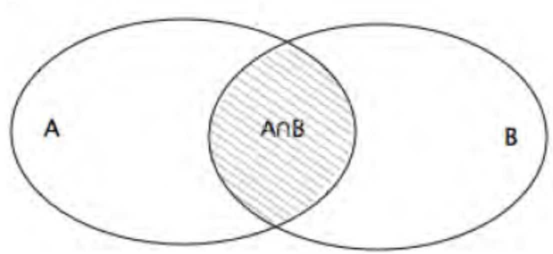
Gli insiemi (2)

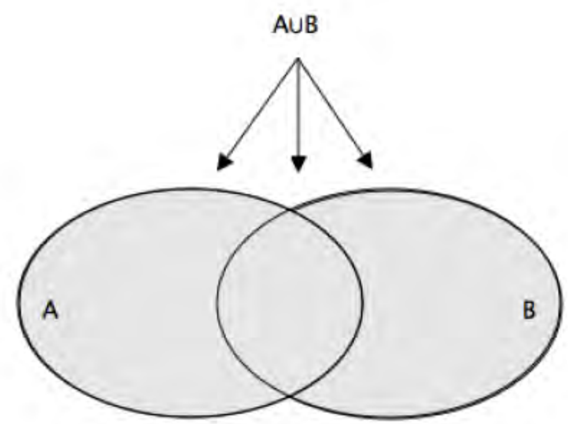
<u>Definizioni:</u>

Sia X un insieme e siano A,B sottoinsiemi di X. *<u>Si definisce</u>*:

- $A \bigcup B$ = ***unione*** di *A* e *B*, ossia l'insieme degli $x \in X$ che appartengono ad *A* oppure a *B* (oppure ad entrambi);
- $A \bigcap B$ = ***intersezione*** di *A* e *B*, ossia l'insieme degli $x \in X$ che appartengono sia ad *A* che a *B*;
- $A \setminus B$ = ***differenza*** fra *A* e *B*, ossia l'insieme degli $x \in X$ che appartengono ad *A*, ma non a *B*;
- $A^c = X \setminus A$ = ***complementare*** di *A* in *X*, ossia l'insieme degli $x \in X$ che non appartengono ad *A*;
- ϕ ***insieme vuoto***, ossia l'unico insieme privo di elementi.

❖ Si noti che $A \bigcup B = B \bigcup A$, $A \bigcap B = B \bigcap A$;
❖ Se $A \bigcap B = \phi$, gli insiemi *A* e *B* si dicono ***disgiunti***.





Notazioni preliminari

<u>Si definisce:</u>

- l'insieme dei numeri **naturali N** = {0, 1, 2, 3, . . .},
- l'insieme dei numeri **relativi Z** = {. . . ,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3, . . .},
- l'insieme dei numeri **razionali Q** = {m/n : m, n ∈ Z, n ≠ 0},
- l'insieme dei numeri **reali R**.

Dati *n* numeri reali *a1, . . . , an* si indica la loro somma con il simbolo di **sommatoria***:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

❖ Ogni numero razionale è univocamente determinato da un allineamento decimale limitato o illimitato periodico e viceversa.
❖ *Esistono numeri che non sono razionali?* SI.
❖ Q è strettamente contenuto in R e i numeri reali non razionali sono detti **irrazionali.**

Numeri reali

Gli *intervalli:*

Alcuni sottoinsiemi di R sono di frequente uso; dati *a, b* $\in$ *R si definiscono gli intervalli:*

$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$
$[a, b) = \{x \in R: a \leq x < b\}$
$(a, b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$
$(a, b) = \{x \in R: a < x < b\}$.

$[a,+\infty) = \{x \in R: x \geq a\}$
$(-\infty, b] = \{x \in R: x \leq b\}$
$(-\infty,+\infty) = R$

- Gli intervalli $[a, b]$, $[a,+\infty)$, $(-\infty, b]$ sono *chiusi* (contengono i punti estremi);
- gli intervalli (a, b), $(a,+\infty)$, $(-\infty, b)$ sono *aperti* (non contengono i punti estremi).

Ad esempio, l'intervallo $[a, b)$ è detto *chiuso a sinistra e aperto a destra*.

Un sottoinsieme *E di R è detto* ***limitato*** se esistono due numeri reali m, M tali che $E \subset [m,M]$, cioè per ogni $x \in E$ si ha: $m \leq x \leq M$.
L'insieme E è detto ***limitato superiormente*** se $E \subset (-\infty,M]$, ovvero $x \leq M$ per ogni $x \in E$;
E è detto ***limitato inferiormente*** se $E \subset [m,+\infty)$, ovvero $m \leq x$ per ogni $x \in E$.

Massimi, minimi ed estremi

− Sia E un sottoinsieme di R; un numero reale r è un ***massimo*** per E se
(*i*) $r \in E$;
(*ii*) $r \geq x$ per ogni $x \in E$.

− Analogamente un numero reale r è un ***minimo*** se $r \in E$ e $r \leq x$ per ogni $x \in E$.

Osservazioni:

1. Un insieme non limitato superiormente (inferiormente) non può avere massimo (minimo);
2. Se un massimo (o un minimo) esiste, allora esso è unico;
3. Se $E = \{x\}$, cioè E è costituito dal solo numero x, allora il massimo coincide col minimo (ed entrambi coincidono con x).

- Sia E un sottoinsieme di R. Un numero $r \in R$ è detto un ***maggiorante*** di E se $r \geq x$ per ogni $x \in E$. Analogamente, $r \in R$ è detto un ***minorante*** di E se $r \leq x$ per ogni $x \in E$.

- Indichiamo con ***MaggE***, ***MinorE*** l'insieme dei maggioranti, rispettivamente, minoranti, di E.

Massimi, minimi ed estremi

• Sia E un sottoinsieme di R, non vuoto e limitato superiormente; allora l'insieme dei maggioranti di E ha <u>minimo</u> in R. Analogamente, se $E \subset R$ non è vuoto e limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di E ha <u>massimo</u> in R.

<u>*Definizioni:*</u>

− Sia E un sottoinsieme di R, non vuoto e limitato superiormente; si definisce allora l' ***estremo superiore*** di E: $\sup E = \min \text{Magg}E$.
− Analogamente, se $E \subset R$ non è vuoto e limitato inferiormente, si definisce l'estremo ***inferiore di E:*** $\inf E = \max \text{Minor}E$.
Nel caso in cui $E \neq \emptyset$ non sia limitato superiormente si pone $\sup E = +\infty$, se non limitato inferiormente si pone $\inf E = -\infty$.

<u>*Osservazioni:*</u>

• L'estremo superiore di un insieme E è un numero reale se E è non vuoto e limitato superiormente.
• Se E ha massimo allora $\sup E = \max E$. Analogamente, $\inf E = \min E$ se esiste il minimo di E.

Disuguaglianze e valore assoluto

Definizioni:

− Il ***valore assoluto*** (o *modulo*) di un numero reale *a è:*

$$|a| = \begin{cases} a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0. \end{cases}$$

- Si ha chiaramente $|-a| = |a|$
- Se a è un numero positivo, allora $|x| \leq a \Leftarrow\Rightarrow -a \leq x \leq a$.

− Se *a, b* sono numeri reali, si definisce ***disuguaglianza triangolare:***

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

− Si ha inoltre, $|a| - |b| \leq |a - b|$

− Si definisce ***parte intera*** di un numero reale *x* il più grande numero intero minore o uguale ad *x*, e si indica [x];

− Si definisce ***parte frazionaria*** di un numero reale *x*, $\{x\} = x - [x]$