Gli insiemi

Definizioni:

- Insieme ***Universo X*** e ***sottoinsiemi*** (cioè gli insiemi A contenuti in X);
- Un insieme è finito se ha un numero finito di elementi):
  - se gli elementi sono "pochi", si elencano: A = {1, 2, 3, 4, 6, 12}
  - se gli elementi sono "molti", si descrive la loro proprietà:
    p(x) = "x è divisore di 12"

Simbologia:

- $X \in A$ significa: x appartiene ad A, ovvero x è un elemento di A;
- $A \subseteq B$, $B \supseteq A$ significano: A è contenuto in B, ovvero B contiene A, ovvero ogni elemento di A è anche elemento di B, o anche A è sottoinsieme di B;
- $A = B$ significa: A coincide con B, ovvero A e B hanno gli stessi elementi, $A \subseteq B$ e $B \subseteq A$;
- $A \subset B$, $B \supset A$ significano: A è strettamente contenuto in B, ovvero A è sottoinsieme proprio di B, ovvero ogni elemento di A è elemento di B ma almeno un elemento di B che non è elemento di A, ovvero $A \subseteq B$ ma A non coincide con B;
- Per negare le proprietà si mette una sbarretta sul simbolo corrispondente.

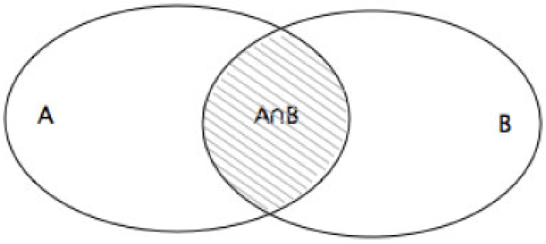
Definizioni:

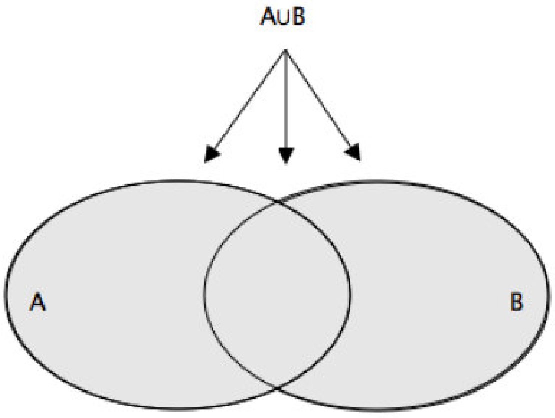
Sia X un insieme e siano A, B sottoinsiemi di X.

Si definisce:

- $A \cup B$ = ***unione*** di A e B, ossia l'insieme degli $x \in X$ che appartengono ad A oppure a B (oppure ad entrambi);
- $A \cap B$ = ***intersezione*** di A e B, ossia l'insieme degli $x \in X$ che appartengono sia ad A che a B;
- $A \setminus B$ = ***differenza*** fra A e B, ossia l'insieme degli $x \in X$ che appartengono ad A, ma non a B;
- $A^C = X \setminus A$ = ***complementare*** di A in X, ossia l'insieme degli $x \in X$ che non appartengono ad A;
- ***insieme vuoto***, ossia l'unico insieme privo di elementi.

- Si noti che $A \cup B = B \cup A$, $A \cap B = B \cap A$;
- Se $A \cap B = \phi$, gli insiemi A e B si dicono ***disguinti***.





Notazioni preliminari

<u>*Si definisce:*</u>

• l'insieme dei numeri **naturali N** = {0, 1, 2, 3, . . .},

• l'insieme dei numeri **relativi Z** = {. . . ,−3,−2,−1, 0, 1, 2, 3, . . .},

• l'insieme dei numeri **razionali Q** = {m/n : m, n ∈ Z, n ≠ 0},

• l'insieme dei numeri **reali R**.

Dati *n* numeri reali *a1, . . . , an* si indica la loro somma con il simbolo di **sommatoria***:*

$$\sum_{k=1}^{n} a_k = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

- ❖ Ogni numero razionale è univocamente determinato da un allineamento decimale limitato o illimitato periodico e viceversa.
- ❖ *Esistono numeri che non sono razionali?* SI.
- ❖ Q è strettamente contenuto in R e i numeri reali non razionali sono detti **irrazionali.**

<u>Numeri reali</u>

Gli *<u>intervalli:</u>*

Alcuni sottoinsiemi di R sono di frequente uso.

Dati *a, b ∈ R si definiscono gli intervalli:*

[a, b] = {x ∈ R: a ≤ x ≤ b}

[a, b) = {x ∈ R: a ≤ x < b}

(a, b] = {x ∈ R: a < x ≤ b}

(a, b) = {x ∈ R: a < x < b} .

[a,+∞) = {x ∈ R: x ≥ a}

(−∞, b] = {x ∈ R: x ≤ b}

(−∞,+∞) = R

- Gli intervalli [a, b], [a,+∞), (−∞, b] sono *<u>chiusi</u>* (contengono gli estremi);

- gli intervalli (a, b), (a,+∞), (−∞, b) sono *<u>aperti</u>* (non contengono gli estremi).

Ad esempio, l'intervallo [a, b) è detto *chiuso a sinistra e aperto a destra*.

Un sottoinsieme *E di R è detto* ***limitato*** se esistono due numeri reali m, M tali che E ⊂ [m,M], cioè per ogni x ∈ E si ha*:* $m \le x \le M$ *.*

L'insieme E è detto ***limitato superiormente*** se E ⊂ (−∞,M], ovvero x ≤ M per ogni x ∈ E;

E è detto ***limitato inferiormente*** se E ⊂ [m,+∞), ovvero m ≤ x per ogni x ∈ E.

Massimi, minimi ed estremi

- Sia E un sottoinsieme di R; un numero reale r è un ***massimo*** per E se

  (*i*) r ∈ E;

  (*ii*) r ≥ x per ogni x ∈ E.
- Analogamente un numero reale r è un ***minimo*** se r ∈ E e r ≤ x per ogni x ∈ E.

Osservazioni:

1. Un insieme non limitato superiormente (inferiormente) non può avere massimo (minimo);
2. Se un massimo (o un minimo) esiste, allora esso è unico;
3. Se E = {x}, cioè E è costituito dal solo numero x, allora il massimo coincide col minimo (ed entrambi coincidono con x).

- Sia E un sottoinsieme di R. Un numero r ∈ R è detto un ***maggiorante*** di E se r ≥ x per ogni x ∈ E. Analogamente, r ∈ R è detto un ***minorante*** di E se r ≤ x per ogni x ∈ E.
- Indichiamo con ***MaggE***, ***MinorE*** l'insieme dei maggioranti, rispettivamente, minoranti, di E.
- Sia E un sottoinsieme di R, non vuoto e limitato superiormente; allora l'insieme dei maggioranti di E ha minimo in R. Analogamente, se E ⊂ R non è vuoto e limitato inferiormente, allora l'insieme dei minoranti di E ha massimo in R.

Definizioni:

- Sia E un sottoinsieme di R, non vuoto e limitato superiormente; si definisce allora: l'***estremo superiore*** di E: supE = min MaggE .
- Analogamente, se E ⊂ R non è vuoto e limitato inferiormente, si definisce: l'estremo ***inferiore di E:*** inf E = max MinorE .

Nel caso in cui E ≠ ∅ non sia limitato superiormente si pone supE = +∞, se non limitato inferiormente si pone inf E = −∞.

Osservazioni:

- L'estremo superiore di un insieme E è un numero reale se E è non vuoto e limitato superiormente.
- Se E ha massimo allora supE = maxE. Analogamente, inf E = minE se esiste il minimo di E.

Disuguaglianze e Valore Assoluto

Definizioni:

- Il ***valore assoluto*** (o *modulo*) di un numero reale a *è:*

$$|a| = \begin{cases} a \text{ se } a \geq 0 \\ -a \text{ se } a < 0. \end{cases}$$

- Si ha chiaramente $|-a| = |a|$
- Se a è un numero positivo, allora $|x| \leq a \Longleftrightarrow -a \leq x \leq a$.

- Se a, b sono numeri reali, si definisce ***disuguaglianza triangolare:***

$$|a + b| \leq |a| + |b|$$

- Si ha inoltre, $\quad |a| - |b| \leq |a - b|$
- Si definisce ***parte intera*** di un numero reale x il più grande numero intero minore o uguale ad x, e si indica $[x]$;
- Si definisce ***parte frazionaria*** di un numero reale x, $\{x\} = x - [x]$