11 Preparazione allo scritto

Si è svolta una prova d'esame, di alcuni esercizi che hanno procurato le maggiori difficoltà sono riportate qua le soluzioni

Esercizio 11.1. Dato un sistema di riferimento cartesiano, siano P_1, P_2 e Q punti di coordinate rispettivamente $(1,1,-1)$, $(3,2,3)$, e $(3,1,0)$, $\mathbf{v}$ il vettore $(2,2,1)^t$, π_1 il piano di equazione $x - y + 2z - 2 = 0$ e S_1, S_2 le due sfere di equazione rispettivamente $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y + 2z - 2 = 0$ e $x^2 + y^2 + z^2 + 4x + 2y - 6z + 8 = 0$

1. Trovare il centro C_1 e il raggio R_1 della sfera S_1, C_2, R_2 di S_2 e un'equazione cartesiana della retta passante per P_1 e P_2.

2. trovare equazione cartesiana di π_2 passante per Q la cui giacitura contiene r e il vettore $\mathbf{v}$ e determinare se S_1 e S_2 sono secanti, tangenti o esterne l'uno all'altra;

3. se esiste trovare un'equazione parametrica per la retta s intersezione di π_2 e π_1 e equazioni cartesiane per le rette contenenti i punti che hanno distanza 2 dal piano π_1 e 3 dal piano π_2.

Soluzione:

1. Posso scrivere S_1 come $(x-2)^2 + (y-3)^2 + (z+1)^2 = 16$ e S_2 come $(x+2)^2 + (y+1)^2 + (z-3)^2 = 6$. Ricordando che la generica sfera può essere scritta come $(x - C_x)^2 + (y - C_y)^2 + (z - C_z)^2 = R^2$ concludiamo che $C_1 = (2,3,-1)$ e $C_2 = (-2,-1,3)$ mentre $R_1 = 4$ e $R_2 = \sqrt{6}$. Ora scriviamo l'equazione parametrica della retta (si riguardi la sezione 2) passante per P e avendo per giacitura il vettore $\overrightarrow{P_2 - P_1}$ (quindi una retta che passerà sicuramente sia per P_1 che per P_2):

$$r : \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 1 + 2t = x \\ 1 + t = y \\ -1 + 4t = z \end{cases} \implies \begin{cases} 2y - 1 = x \\ 4y - 5 = z \end{cases}$$

Le ultime due sono le equazioni cartesiane cercate.

2. analogamente a prima, mettendo le giaciture $\mathbf{v}$ e $\overrightarrow{P_2 - P_1}$

$$\pi_2 : \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \end{pmatrix} + t_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} 3 + 2t_1 + 2t_2 = x \\ 1 + t_1 + 2t_2 = y \\ 4t_1 + t_2 = z \end{cases}$$
$$\implies -x + 6y + 2z + 15 = 0$$

Per la seconda richiesta sarà sufficiente calcolare la distanza $d(C_1, C_2) = \|C_1 - C_2\| = 4\sqrt{3}$, sono esterne in quanto la distanza tra i due centri è maggiore della somma dei raggi.

3. intersechiamo π_1 e π_2:

$$\begin{cases} -x + 6y + 2z + 15 = 0 \\ x - y + 2z - 2 = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} y = \dfrac{-13 - 4z}{5} \\ x = y - 2z + 2 \end{cases}$$

Per trovare un punto per cui passa la retta basterà porre ad esempio $z = 1$ e otteniamo il punto $P' = (-\frac{17}{5}, -\frac{17}{5}, 1)$ mentre per trovare il vettore di giacitura basterà risolvere il sistema omogeneo e porre per esempio $y = 1$:

$$\begin{cases} -x + 6y + 2z = 0 \\ x - y + 2z = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} z = -\dfrac{5}{4}y \\ x = y - 2z \end{cases}$$

quindi un'equazione parametrica è la seguente:

$$\begin{pmatrix} -\frac{17}{5} & -\frac{17}{5} & 1 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -\frac{3}{2} \\ 1 \\ -\frac{5}{4} \end{pmatrix}$$

Per l'ultimo punto si applica la seguente che mi dà la distanza piano-punto e si mette a sistema per i due casi

$$d(P, \pi) = \frac{|\sum_{i=1}^{3} a_i c_i + b|}{\sqrt{\sum_{i=1}^{3} a_i^2}}$$

dove gli a_i sono i coefficienti dell'equazione del piano, b il termine noto (eventualmente nullo) e i c_i le coordinate del punto.

Esercizio 11.2. $F_t(1, 0, 0, 0) = (2t^2, 0, 0, 0)$, $F_t(t, 1, 0, 0) = (2t^3 + t, t, 0, 0)$, $F_t(0, 3, 1, 0) = (3t - 3, 3t + 3, 2, -t)$ e $F_t(0, 0, 1, -1) = (0, 0, 2 - t, -t - 4)$

1. trovare la matrice associata nelle basi canoniche
2. Dire per quali valori reali t, A_t è diagonalizzabile sui reali.
3. Calcolare autovalori e autovettori di A_1.
4. Calcolate la segnatura di $A_0^t + A_0$

Soluzione:

1. Dobbiamo semplicemente vedere i vettori di base come combinazioni lineari dei vettori dati e poi mettere nelle rispettive colonne della matrice le loro immagini rispetto a F_t. A titolo di esempio, possiamo vedere $\mathbf{e}_2$ come $(t, 1, 0, 0) - t\mathbf{e}_1$, quindi $F_t(\mathbf{e}_2) = F_t(t, 1, 0, 0) - tF_t(\mathbf{e}_1) =$

$(t, t, 0, 0)$ che corrisponderà alla seconda colonna (notare che la prima praticamente l'abbiamo già). La matrice è

$$A_t = \begin{pmatrix} 2t^2 & t & -3 & -3 \\ 0 & t & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & t \\ 0 & 0 & -t & 4 \end{pmatrix}$$

2. Calcoliamo il polinomio caratteristico:

$$det(A_t - x\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} 2t^2 - x & t & -3 & -3 \\ 0 & t - x & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 2 - x & t \\ 0 & 0 & -t & 4 - x \end{vmatrix} = (2t^2 - x)(t - x)(x^2 - 6x + 8 + t^2)$$

   Le radici del polinomio caratteristico, i candidati autovalori, sono $x_1 = 2t^2$, $x_2 = t$, $x_{3,4} = 3 \pm \sqrt{1 - t^2}$. Per essere diagonalizzabile, deve ammettere una base di autovettori, o equivalentemente la somma di tuttu gli autospazi relativi agli autovalori deve essere uguale alla dimensione dello spazio. Dalle ultime due ricaviamo che sicuramente dovrà essere $-1 \leq t \leq 1$; in questo dominio, x_1 e x_2 non saranno mai uguali a x_3 e x_4 (verificare!) quindi possiamo affermare che ci saranno 4 autovalori distinti per tutti i t eccezion fatta per $t = 0, 1/2$ (caso $x_1 = x_2$) e per $t = \pm 1$ (caso $x_3 = x_4$); si verifica facilmente che per $t = 0$, il rango di $A_t - x\mathbb{I}$ è 2, in particolare $dim(Ker(A_0 - 0\mathbb{I})) = 2$ che è anche la dimensione dell'autospazio (praticamente questo è vero per definizione), quindi dovendo essere le dimensioni degli altri autospazi necessariamente maggiori o uguali a uno, si può concludere che la somma delle dimensioni degli autospazi per A_0 è effettivamente 4 e concludere che per $t = 0$ A_t è diagonalizzabile. Con stesso ragionamento concludo che per $t = \pm 1, 1/2$ A_t non è diagonalizzabile in quanto il rango di $A_t - x\mathbb{I}$ è uguale a 3 e quindi gli autospazi relativi avranno dimensione 1.

   Conclusione: A_t diagonalizzabile per $-1 < t < 1$, $t \neq 1/2$.

3. Gli autovalori li abbiamo già, sono gli x_i dell'esercizio precedente con $t = 1$, per gli autovettori basterà risolvere i sistemi omogenei.

4. Con il metodo discusso nell'esercizio 9.1, si trova che ha segnatura (2,1) (si consiglia di partire a calcolare determinanti da in basso a destra).

$$A_0^t + A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 & -3 \\ 0 & t & 3 & 3 \\ -3 & 3 & 4 & 0 \\ -3 & 3 & 0 & 8 \end{pmatrix} \tag{11.1}$$

Esercizio 11.3. Date A, B matrici reali quadrate e simmetriche di ordine 4, abbia A segnatura $(2, 2)$ e B definita positiva. Vero o falso:

1. $A - B$ è sempre invertibile.
2. $A - B$ può avere segnatura $(1, 3)$.
3. La matrice complessa $C = A + iB$ può avere determinante zero

Soluzione:

1. falso, controesempio:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   e $A - B$ non è invertibile (non ha rango massimo)

$$A - B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

2. Vero, esempio

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

   prendere B come prima e

$$A - B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -0.5 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -2 \end{pmatrix}$$

3. falso, poniamo $C\mathbf{v} = \mathbf{0}$, allora anche $\mathbf{v}^t C\mathbf{v} = 0$ ovvero $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} + i\mathbf{v}^t B\mathbf{v} = 0$, ma essendo le matrici simmetriche reali, per forza $\mathbf{v}^t A\mathbf{v} = 0,\ \mathbf{v}^t B\mathbf{v} = 0$, ma B è definita positiva, quindi per forza $\mathbf{v} = 0$. Siamo arrivati a dire che se $C\mathbf{v} = \mathbf{0}$ allora per forza $\mathbf{v} = \mathbf{0}$ cioè C è invertibile