8 Autovettori e autovalori

Definizione 8.1. *Sia $f : V \to W$ lineare, si chiama autovettore un $\mathbf{v} \in V$, $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$ tale che $f(\mathbf{v}) = \lambda\mathbf{v}$ per qualche $\lambda \in K$, mentre λ è detto autovalore relativo all'autovettore $\mathbf{v}$.*

Definizione 8.2. *Si chiama spettro di f l'insieme degli autovalori di f, autospazio relativo all'autovalore λ lo spazio generato dagli autovettori relativi a λ, degenerazione dell'autospazio la sua dimensione (se ha dimensione 1 si dice che non ha degenerazione).*

Si ricordi anche la seguente

Definizione 8.3. *Due matrici A e B si dicono simili se $\exists M \in GL(n, K)$ (gruppo lineare delle matrici invertibili sul campo K) tale che*

$$A = M^{-1}BM \tag{8.1}$$

Teorema 8.1. *Due matrici simili rappresentano la stessa applicazione lineare in basi diverse, in particolare M rappresenta la matrice di cambio di base*

Dimostrazione. Usiamo la notazione matriciale, allora sapendo per ipotesi che $B = M^{-1}AM$, interpretando M come la matrice cambiamento di base da W a V (possibile in quanto invertibile)

$$\begin{aligned} A\mathbf{v}_V = \mathbf{w}_V \Rightarrow AM\mathbf{v}_W = M\mathbf{w}_W \Rightarrow M^{-1}AM\mathbf{v}_W = M^{-1}M\mathbf{w}_W \\ \Rightarrow B\mathbf{v}_W = \mathbf{w}_W \end{aligned} \tag{8.2}$$

□

Definizione 8.4. *Una matrice si dice diagonalizzabile se è simile ad una matrice diagonale, ovvero una matrice del tipo*

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & \cdots & 0 & \lambda_n \end{bmatrix} \tag{8.3}$$

con i λ_i autovalori della matrice

Nota bene: tutte le definizioni e teoremi per le matrici hanno un perfetto analogo per le applicazioni lineari in quanto c'è corrispondenza biunivoca tra le due, in particolare si potrà parlare anche di diagonalizzabilità di una applicazione lineare, che si tradurrà col fatto che sia possibile trovare una base di autovettori di f.

Definizione 8.5. *Sia $A \in M_n(K)$ e sia t un'indeterminata. Si dice polinomio caratteristico di A il polinomio di grado n definito da*

$$P_A(t) = det(A - t\mathbb{I}) = \begin{vmatrix} a_{11} - t & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - t & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} - t \end{vmatrix} \tag{8.4}$$

dove si è indicato con $\mathbb{I}$ la matrice identità di grado n.

Il polinomio caratteristico è utile per trovare gli autovalori di una matrice, infatti si ha il seguente

Teorema 8.2. *Gli autovalori di una matrice A (ricordiamoci sempre che il tutto varrebbe anche considerando applicazioni lineari) sono le radici del polinomio caratteristico*

Dimostrazione. Da $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ possiamo arrivare a $(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ che ha soluzioni non banali se e solo se $det(A - \lambda\mathbb{I}) = 0$ in quanto se fosse diverso da zero $A - \lambda\mathbb{I}$ sarebbe invertibile e otterrei come unica soluzione moltiplicando a sinistra ambo i membri per $(A - \lambda\mathbb{I})^{-1}$ la soluzione identicamente nulla. Ma notiamo che ci riduciamo a $det(A - \lambda\mathbb{I}) = P_n(\lambda) = 0$ ovvero sono autovalori quei λ che sono radici del polinomio caratteristico □

Quindi per trovare gli autovalori basta trovare le radici del polinomio caratteristico, mentre per trovare gli autovettori relativi ad un autovalore λ si dovrà risolvere il sistema $(A - \lambda\mathbb{I})\mathbf{v} = \mathbf{0}$ dove le incognite sono rappresentate dalle componenti di $\mathbf{v}$.

Esercizio 8.1. Trovare autovalori e autovettori dell'applicazione lineare la cui azione su vettori di una specifica base è:

$$f(1, 2, 0) = (0, 1, 1)$$

$$f(1, 0, 1) = (3, 1, 0)$$

$$f(0, 2, 1) = (2, 2, 2)$$