6 Cambiamenti di base e matrici associate (29/11/2016)

Teorema 6.1. *Dato uno spazio vettoriale V e una base $\{\mathbf{e}_i\}$, è possibile esprimere ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ come*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i \tag{6.1}$$

dove i coefficienti a_i, dette coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base di $\{\mathbf{e}_i\}$ sono univocamente determinati.

Dimostrazione. I coefficienti esistono in quanto per ipotesi $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base, in particolare sono generatori, ora voglio l'unicità, supponiamo che ci siano altri coefficienti b_j che soddisfano, allora

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i)\mathbf{e}_i = \mathbf{0} \tag{6.2}$$

dove nell'ultimo passaggio della (6.2) si è scritta una combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti con il vettore nullo, che obbliga, per definizione di lineare indipendenza, i coefficienti $(a_i - b_i)$ a essere nulli ovvero $a_i = b_i$, la tesi.

□

In pratica una base può essere considerata a tutti gli effetti un sistema di riferimento, in quanto ad ogni vettore vengono associate una unica n-upla di numeri che possono essere considerati a tutti gli effetti come coordinate. Ci si pone il problema allora di come cambino le coordinate di uno specifico vettore se cambio sistema di riferimento ovvvero cambio base. Per la risoluzione di questo problema vengono in aiuto le matrici, in quanto si può associare all'operazione di cambio di base una matrice, detta matrice di cambiamento di base. Si ha quindi il seguente

Teorema 6.2. *Siano $\{\mathbf{v}_i\}$, $\{\mathbf{w}_j\}$ due basi di uno stesso spazio vettoriale, allora la matrice di cambiamento di base A, ovvero la matrice tale per cui $A\mathbf{v} = \mathbf{w}$ dove $\mathbf{v}$ è un vettore espresso rispetto alla base $\{\mathbf{v}_i\}$ e $\mathbf{w}$ lo stesso vettore espresso rispetto alla base $\{\mathbf{w}_i\}$, ha per colonne le coordinate dei $\mathbf{v}_i$ espressi rispetto ai $\mathbf{w}_j$.*

Dimostrazione. Esprimiamo i vettori $\{\mathbf{v}_i\}$ rispetto alla base $\{\mathbf{w}_j\}$, mentre considereremo un generico vettore $\mathbf{v}$ espresso come $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{w}_1 + ... + a_{1n}\mathbf{w}_n \\
\mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{w}_1 + ... + a_{2n}\mathbf{w}_n \\
&\vdots \\
\mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{w}_1 + ... + a_{nn}\mathbf{w}_n
\end{aligned} \tag{6.3}$$

considerando $\mathbf{v}$, esso potrà essere scritto come

$$\mathbf{v} = \sum_{i,j} x_i a_{ij} \mathbf{w}_j \tag{6.4}$$

ovvero, chiamando A la matrice dei coefficienti (a_{ij}) trasposta, come $A\mathbf{v}$, che riguardando il sistema ci si accorge che è la tesi. $\square$

Esercizio 6.1. trovare la matrice del cambiamento di base tra i seguenti insiemi di vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sono stati proposti poi altri esercizi simili.

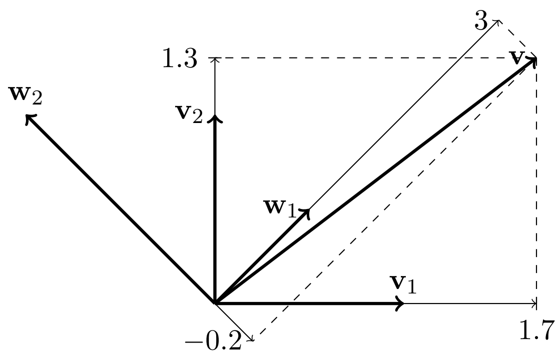

Figura 3: *Esempio di vettore espresso rispetto a basi differenti*