5 Applicazioni e sistemi lineari, teorema delle dimensioni (25/11/2016)

Definizione 5.1. *Sia $f : V \to W$, essa si dice lineare se $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall h, k \in K, f(h\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2) = hf(\mathbf{v}_1) + kf(\mathbf{v}_2)$.*

Teorema 5.1. *Data $f : V \to W$, fissate delle basi $\{\mathbf{v_i}\}, \{\mathbf{w_j}\}$ rispettivamente di V, W, $\exists A \in M(n, m)$ tale che $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v}$ $\forall \mathbf{v} \in V$ (ovvero posso rappresentare l'azione della mia applicazione lineare per mezzo di una matrice, detta matrice associata a f).*

Dimostrazione. Posso vedere $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$ per certi coefficienti a_i e $f(\mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^{m} b_{kj} \mathbf{w}_j$ $\forall k$ per certi b_{kj}, allora $f(\mathbf{v}) = \sum_{i,j} a_i b_{ij} \mathbf{w}_j$. La matrice di elementi (b_{ij}) è la matrice A che cercavamo, essa fissate le basi è unica. □

Questo teorema ci dice che le applicazioni lineari sono in corrispondenza biunivoca con le matrici, quindi possiamo parlare indifferentemente di applicazioni lineari o delle loro matrici associate. Le seguenti definizioni vengono date per le applicazioni lineari ma sono estendibili in modo ovvio anche per le matrici

Definizione 5.2. *Data $f : V \to W$, chiamo $Ker(f) = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v} = 0)\}$, chiamo $Im(f) = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists \mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v} = \mathbf{w})\}$*

Teorema 5.2. *Sia $f : V \to W$ lineare e iniettiva, allora $Ker(f) = \{0\}$*

Dimostrazione. Per una applicazione lineare si ha sempre $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ in quanto per linearità si ha che

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \tag{5.1}$$

essendo la funzione iniettiva, lo $\mathbf{0}$ sarà l'unico vettore che la funzione manda in zero □

Teorema 5.3 (DELLE DIMENSIONI)**.** *Sia $f : V \to W$ lineare, siano n, k, r le dimensioni rispettivamente di V, $Ker(f)$ e $Im(f)$, allora si ha*

$$n = k + r \tag{5.2}$$

Teorema 5.4. *Sia $f : V \to W$ lineare, se ne esiste una biunivoca tra i due spazi allora essi hanno la stessa dimensione*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{v}_i$ con $\{\mathbf{v}_i\}$ base di V, allora

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^{n} a_i f(\mathbf{v}_i)$$

gli $\{f(\mathbf{v}_i)\}$ generano l'immagine di f, ma essa corrisponderà a W per l'ipotesi di suriettività, ora non resta che applicare il 5.3 sapendo che per l'ipotesi di iniettività $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$ per il 5.2. □

Per la corrispondenza biunivoca introdotta prima tra matrici e sistemi lineari e grazie alla possibilità di rappresentare un sistema del tipo

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ b_2 &= a_{21}x_1 + ... + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ b_m &= a_{n1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{5.3}$$

come $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e trasferire il tutto a operazioni sulle matrici

Teorema 5.5 (STRUTTURA SISTEMI LINEARI). *Le soluzioni di un sistema lineare si compongono della generale soluzione del sistema omogeneo e di una soluzione particolare*

Dimostrazione. Posso vedere il sistema come $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, se si indica con $\mathbf{x}_0$ una soluzione del sistema omogeneo e con $\mathbf{x}_p$ una soluzione particolare, si avrà

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}_p = A\mathbf{x}_p = b$$

ovvero $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p$ risolve anche essa il sistema. In particolare si avrà che la dimensione delle soluzioni del sistema eguaglierà la dimensione del $ker(A)$. □