4 Sottospazi, formula di Grassman, somma diretta, esercizi (21/11/2016)

Teorema 4.1 (Formula di Grassman)**.** *Siano W, U sottospazi vettoriali di V rispettivamente di dimensione s, t, n, allora*

$$dim(U + W) = dim(U) + dim(W) + dim(W \cap U) \tag{4.1}$$

Dimostrazione. Sia $\{\mathbf{x_1}, ..., \mathbf{x_l}\}$ base di $W \cap U$ con l dimensione di $W \cap U$, allora essendo nell'intersezione posso completarle sia ad una base di $U\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_l, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{t-l}\}$ che ad una base di $W\{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_s, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{s-l}\}$. Banalmente la base $B = \{\mathbf{x}_1, ..., \mathbf{x}_l, \mathbf{u}_1, ..., \mathbf{u}_{t-l}, \mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_{s-l}\}$ genera il sottospazio somma, sommandone gli indici trovo che è formata da $t + s - l$ elementi, quindi la tesi seguirà se dimostro la loro indipendenza lineare. Siano a_i, b_j, c_k coefficienti rispettivamente dei $\mathbf{x}_i, \mathbf{w}_j, \mathbf{u}_k$ della combinazione lineare dei vettori di B con il vettore nullo, si avrà

$$b_1\mathbf{w}_1 + ... + b_{s-l}\mathbf{w}_{s-l} = -(a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_l\mathbf{x}_l + c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_{t-l}\mathbf{u}_{t-l}) \tag{4.2}$$

dove il primo membro della (4.2) apparterrà a W quindi necessariamente il secondo deve appartenere a $U \cap W$, quindi guardando solo il secondo membro sarà possibile esprimerlo come combinazione lineare dei soli $\mathbf{x}_j$ con certi coefficienti e_j, si avrà

$$a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_l\mathbf{x}_l + c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_{t-l}\mathbf{u}_{t-l} = e_1\mathbf{x}_1 + ... + e_l\mathbf{x}_l \tag{4.3}$$

o riordinando

$$(a_1 - e_1)\mathbf{x}_1 + ... + (a_l - e_l)\mathbf{x}_l + c_1\mathbf{u}_1 + ... + c_{t-l}\mathbf{u}_{t-l} = 0 \tag{4.4}$$

e si vede subito che nella (4.4) ho combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti col vettore nullo, quindi tutti i coefficienti, in particolare i c_k, saranno nulli. Allora con l'informazione che i c_k sono nulli ritorniamo nella (4.2) e riordinando otteniamo

$$a_1\mathbf{x}_1 + ... + a_l\mathbf{x}_l + b_1\mathbf{w}_1 + ... + b_{s-l}\mathbf{w}_{s-l} = 0 \tag{4.5}$$

ancora una volta abbiamo una combinazione lineare con vettore nullo di vettori che sappiamo linearmente indipendenti per ipotesi in quanto formano una base per W. Ho dimostrato che tutti i coefficienti sono nulli e quindi l'indipendenza lineare dei vettori di B che quindi formano una base di $U + W$. □

Definizione 4.1. *Si dice che $U + W$ con U, W sottospazi vettoriali di V sono in somma diretta se $dim(U \cap W) = 0$.*

Esercizio 4.1. Si considerino i seguenti vettori in $\mathbb{R}^4$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} h \\ 2 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ h \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ h \\ h \end{pmatrix} \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$. Siano $V = Span(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{v}_3)$ e $U = Span(\mathbf{u})$.

1. Calcolare al variare di h la dimensione di V;

2. Stabilire per quali h $\mathbf{u} \in U$;

3. Dire per quali h U e V sono in somma diretta.