3 Determinanti, rango, teorema di Rouchè-Capelli, esercizi (18/11/2016)

Definizione 3.1. *Data una matrice $A \in M(n,m)$ (cioè matrice con n righe e m colonne), chiamo rango il numero massimo di colonne linearmente indipendenti (o equivalentemente la dimensione dello spazio generato dalle colonne).*

Si dimostra che il rango di una matrice A è invariante per trasposizione, cioè $r(A^t) = r(A)$ quindi il rango è anche il numero di righe linearmente indipendenti. Se ne conclude che sarà sempre $r(A \in M(n,m)) \leq min\{n,m\}$. Per calcolare il rango di una matrice bisogna contare quante colonne o righe linearmente indipendenti ci sono nella matrice stessa, e nel fare ciò si può sfruttare la proprietà notevole del determinante delle matrici quadrate, che è diverso da zero se e solo se la matrice contiene colonne linearmente indipendenti. Ricordiamo il metodo di calcolo per il determinante:

$$det(A) = a \text{ se } A \text{ è martice corrispondente a un solo numero } a \tag{3.1}$$

$$det(A) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{i+k} a_{ik} det(A_{ik}) \tag{3.2}$$

Dove nella (3.2) si intende il determinante sviluppato presso la riga i-esima per una matrice con n colonne (naturalmente lo si può sviluppare anche per colonna con formula analoga) e A_{ik} indica la matrice ottenuta da quella di partenza togliendo la i-esima riga e la k-esima colonna. Si noti che il determinante è definito in modo induttivo e ha senso solo per matrici quadrate.

Esercizio 3.1. Si determini il rango della seguente matrice:

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Soluzione: si tratterà di calcolare determinanti delle sottomatrici quadrate, si ricorda che basta una sottomatrice quadrata n con determinante non nullo per poter concludere che il rango della matrice di partenza è maggiore o uguale a n ma per dire che è minore di n bisogna mostrare (a meno di metodi più furbi per casi così semplici) che tutte le sottomatrici quadrate di ordine n hanno determinante nullo. Altri esercizi simili sono stati improvvisati e si è rispiegato meglio il concetto di dipendenza e indipendenza lineare e associati.

Il concetto di rango è utile per la discussione di sistemi lineari. Si ha il seguente

Teorema 3.1 (Rouchè-Capelli)**.** *Dato un sistema lineare, sia A la matrice dei coefficienti e Ab la matrice dei coefficienti orlata con i termini noti. Il sistema è risolubile* $\iff r(A) = r(Ab)$

Dimostrazione. Un sistema lineare può essere visto come

$$x_1 \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{bmatrix} + \cdots + x_m \begin{bmatrix} a_{1m} \\ a_{2m} \\ \vdots \\ a_{nm} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

Rango della matrice Ab maggiore di quello si A significa che non è possibile esprimere il vettore colonna $\mathbf{b}$ come combinazione lineare degli altri vettori colonna $\mathbf{a}_j$ ovvero non esiste nessuna m-upla $\{x_1, ..., x_m\}$ che possa risolvere il ssistema □

Esercizio 3.2. Si discuta e risolva il seguente sistema lineare:

$$\begin{cases} x + y + 7z = 2 \\ x - 5y = 0 \end{cases} \tag{3.4}$$