2 Geometria analitica: equazioni parametriche, cartesiane, esercizi (14/11/2016)

Definizione 2.1. *Sia S un insieme geometrico lineare (retta, piano..., tecnicamente dovremmo parlare si spazi affini ma qui non voglio complicare troppo la trattazione) definito tramite uno spazio vettoriale* $W \subseteq V$ *con* $dim(V) = n$. *Scelta una base di* W $\{\mathbf{w}_1, ..., \mathbf{w}_s\}$, *con* $s = dim(S)$ *e un punto Q per cui si vuole passi S, si può esprimere ogni punto* $P(x_1, ..., x_n)$ *tramite:*

$$\overrightarrow{\mathbf{QP}} = t_1\mathbf{w}_1 + ... + t_s\mathbf{w}_s \tag{2.1}$$

per opportuni parametri $t_1, ..., t_s \in \mathbb{R}$. *Esplicitando le coordinate si ottiene:*

$$\begin{aligned} x_1 &= q_1 + t_1w_{11} + ... + t_sw_{1s} \\ x_2 &= q_2 + t_1w_{21} + ... + t_sw_{2s} \\ &\vdots \\ x_n &= q_n + t_1w_{n1} + ... + t_sw_{ns} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Le (2.2) *sono dette equazioni parametriche di S.*

In pratica la formula da usare che mi individua l'insieme geometrico che voglio trattare una volta individuato il punto Q per cui passa e i vettori che lo generano è la (2.1), poi le (2.2) si otterranno semplicemente esplicitando la formula vettoriale in componenti. Si noti che si hanno s vettori linearmente indipendenti e s parametri che formeranno uno spazio di dimensione s, mentre n è la dimensione dello spazio vettoriale in cui è immerso l'insieme geometrico.

Esempio 2.1. Pensiamo al caso concreto del piano in uno spazio vettoriale di dimensione 3, allora detti $\mathbf{v} = \{v_1, v_2, v_3\}$ e $\mathbf{w} = \{w_1, w_2, w_3\}$ i vettori che lo generano e detto $Q = \{x, y, z\}$ le equazioni parametriche del piano si scrivono:

$$\begin{aligned} x &= q_1 + t_1w_1 + t_2v_1 \\ y &= q_2 + t_1w_2 + t_2v_2 \\ z &= q_3 + t_1w_3 + t_2v_3 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Notare: 3 coordinate come la dimensione dello spazio in cui è immerso e 2 parametri come la dimensione del piano;

Le coordinate cartesiane invece si otengono mettendo a sistema le parametriche ed eliminando i parametri, si otterrà per il piano un'equazione del tipo

$$ax + by + cz = 0 \tag{2.4}$$

dove è interessante notare che il vettore di componenti {a, b, c} è ortogonale (preciseremo tra un attimo che significa) al piano (cioè a qualsiasi vettore giacente su esso)

Definizione 2.2. *Sia V uno spazio vettoriale, un prodotto scalare su V è un'applicazione bilineare $(\ ,\ ): V \times V \to \mathbb{R}$ tale che:*

$$(v, w) = (w, v)\ \forall v, w \in V\ \textit{(simmetria)} \tag{2.5}$$

$$(v, v) \geq 0\ \forall v \in V\ \textit{e}\ (v, v) = 0 \iff v = 0\ \textit{(definito positivo)} \tag{2.6}$$

Due vettori v, w si dicono ortogonali se $(v, w) = 0$.

In particolare noi tratteremo il solito prodotto scalare euclideo su $\mathbb{R}^n$.

Esercizio 2.1. (preso da prove in itinere) dati i vettori $\mathbf{u} = \hat{\mathbf{i}} - \hat{\mathbf{j}}$ e $\mathbf{v} = \hat{\mathbf{k}} - \hat{\mathbf{j}}$ determinare:

1. un versore $\hat{\mathbf{w}} \in Span(\mathbf{u} - \mathbf{v})$;
2. l'equazione cartesiana di $Span(\mathbf{u}, \mathbf{v})$;
3. un vettore $\mathbf{n} \perp \mathbf{u}$ e $\mathbf{v}$;
4. un vettore $\mathbf{x} \in Span(u, v)$ con $\mathbf{x} \perp \mathbf{v}$

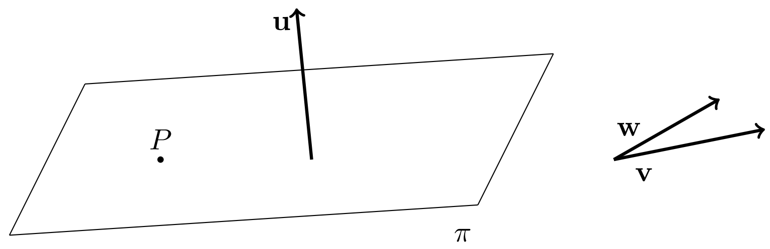

Figura 2: *un piano π, il punto P per cui passa, i vettori $\mathbf{v}$ e $\mathbf{w}$ che lo generano e un vettore $\mathbf{u}$ ortogonale al piano*