1 Generalità su spazi vettoriali, esempi, concetto di linearità, dimensione (7/11/2016)

Definizione 1.1 (SPAZIO VETTORIALE). *Sia dato un insieme V e un campo K (considereremo sempre K= $\mathbb{R}$ salvo diverso avviso), la coppia (V,K) si dice SPAZIO VETTORIALE se* $\forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V, \forall k, h \in K, k\mathbf{w}+h\mathbf{v} \in V$ *(Proprietà di linearità)*

Questa è la definizione cardine dell'intero corso, ma cerchiamo di capirla un po', che significato ha il concetto di spazio vettoriale? In matematica le definizioni sono spesso e volentieri astratte in quanto si vuole più generalità possibile, generalità che permette di applicare i risultati che la teoria (in questo caso degli spazi vettoriali) riesce a sviluppare a più concetti possibili; nonostante ciò esse e i loro nomi si rifanno a certi esempi prototipo. Quando si pensa ad uno spazio vettoriale la prima cosa che viene in mente è il classico insieme dei vettori in $\mathbb{R}^3$ (o più generalmente in $\mathbb{R}^n$ con n arbitrario). Lo spazio dei vettori in tre dimensioni (o meno) è effettivamente uno spazio nel senso usuale del termine.

Il concetto cardine che caratterizza gli spazi vettoriali è la proprietà di linearità, e ogni volta che si voglia controllare se effettivamente un insieme qualsiasi ha la struttura di spazio vettoriale tocca sempre controllare che combinazioni lineari degli elementi di un insieme appartengano ancora all'insieme.Facciamo i seguenti esempi:

Esempio 1.1. Lo spazio dei vettori di norma unitaria (ovvero con lunghezza uguale a 1) i cui punti individuati sul piano formano una circonferenza e i punti individuati sullo spazio formano una sfera (attenzione! Presso il linguaggio dei matematici per sfera si indica la superficie sferica!). Esso NON è uno spazio vettoriale in quanto è facile vedere che combinazioni lineari di vettori dell'insieme escono dall'insieme stesso (Figura 1).

Esempio 1.2. Lo spazio dei polinomi di grado n, infatti sommando polinomi e/o moltiplicarli per SCALARI (ovvero per numeri o se i matematici preferiscono per elementi del campo K) non si esce dall'insieme dei polinomi. Quseto è un esempio di spazio vettoriale che non si riferisce a vettori, infatti sebbene l'esempio dei vettori sia l'esempio primo di spazio vettoriale ciò non deve pensare assolutamente che sia l'unico: gli spazi vettoriali sono insiemi vastissimi e ne fanno parte per esempio anche le funzioni continue (per combinazioni lineari di funzioni continue si hanno sempre funzioni continue).

Ciò che caratterizza gli spazi vettoriali è il concetto di linearità e questo deve essere molto chiaro.

Definizione 1.2. *Sia V uno spazio vettoriale, un insieme* $W \subseteq V$ *si dice sottospazio vettoriale di V se W soddisfa i requisiti per chiamarlo spazio vettoriale.*

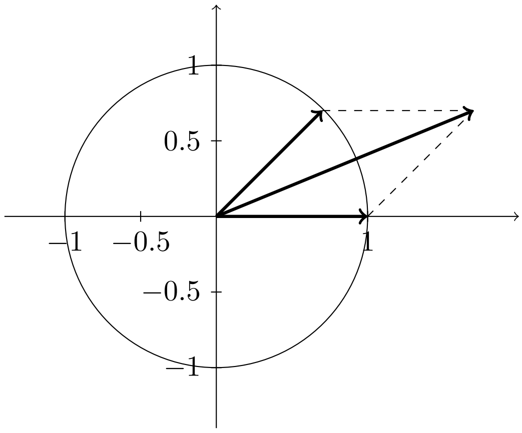

Figura 1: *I vettori di norma unitaria non formano uno spazio vettoriale, infatti una loro combinazione lineare può molto facilmente uscire dal sottoinsieme*

In particolare si dovrà controllare sempre se con combinazioni lineari di elementi del sottoinsieme non si esca dal sottoinsieme stesso (nell'esempio 1.1 ci riferiamo a un sottoinsieme dello spazio dei vettori ma di certo non è un sottospazio).

Definizione 1.3. *Dato un insieme $v_1, v_2, ..., v_n$ si dice che essi sono linearmente dipendenti se è possibile esprimere uno come combinazione lineari degli altri (da cui implicherà che ciò è possibile farlo per tutti), si dicono linearmente indipendenti se una loro combinazione lineare col vettore nullo obbliga i coefficienti della combinazione lineare a essere tutti nulli (da cui implicherà che non possono essere linearmente dipendenti), si dicono generatori di uno spazio vettoriale V se con combinazioni lineari di essi è possibile esprimere ogni elemento di V*

Esercizio 1.1. Dire se un certo insieme di vettori è linearmente indipendente o meno (improvvisato). Riflessioni e tecniche sulla cosa.

Definizione 1.4. *Un insieme di vettori linearmente indipendenti e generatori di uno spazio vettoriale V si dicono base di V*

Si dimostra che basi diverse di uno stesso spazio vettoriale hanno lo stesso numero di elementi, e quindi ha senso la definizione seguente:

Definizione 1.5. *Dato uno spazio vettoriale V si dice dimensione di V il numero di elementi di una base di V*

In particolare ciò è concorde col senso usuale del termine se ci riferiamo allo spazio dei vettori, ma ancora una volta avere un'immagine della cosa aiuta ma bisogna sempre ricordarsi che ciò che conta sono ciò che definizioni e teoremi dicono

Esercizio 1.2. Dire la dimensione dello spazio dei polinomi.

Soluzione: basta trovare una base, la dimensione è n+1 se n è il grado massimo dei polinomi.