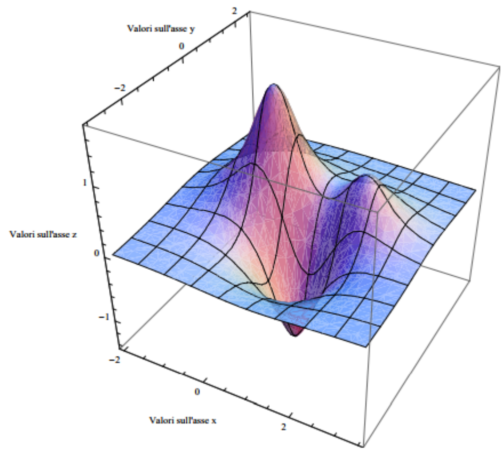
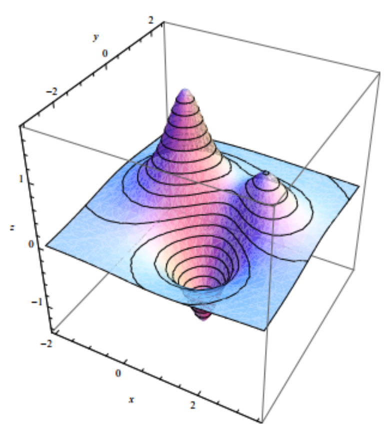
Grafico per funzioni di due variabili

Non tutte le caratteristiche che si evidenziano nel grafico delle funzioni di una variabile potranno essere trasferite ai grafici di funzioni di due variabili, per esempio non avrà alcun senso parlare di crescenza o descrescenza, mentre potremo ancora considerare i concetti di massimo e minimo.La figura seguente mostra una situazione in cui sono presenti due monti e una valle.



Linee di livello

Queste linee vengono tracciate per evidenziare sulla superficie tutti i punti che si trovano a una determinata quota, punti che nelle situazioni comuni si distribuiscono su una linea che si può pensare ottenuta intersecando la superficie con un piano orizzontale (parallelo a Oxy). La figura che segue mostra alcune di queste linee per la stessa superficie della figura precedente.



Derivate parziali

Data una funzione z = f(x,y) e un punto (x_0, y_0) interno al suo dominio, possiamo considerare la funzione, della variabile x, $z = f(x, y_0) = g(x)$, ottenuta fissando y al valore y_0 e lasciando variare x, ovvero la funzione che si ottiene intersecando la superficie $z = f(x, y)$ con il piano verticale $y = y_0$. Possiamo ora considerare il

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x, y_0) - f(x_0, y_0)}{x - x_0}$$

Se questo esiste ed è finito, esso si chiama *derivata prima parziale* rispetto a x della funzione f, nel punto (x_0, y_0) e si indica con

$$f\prime_x(x_0, y_0).$$

In maniera perfettamente analoga, fissando x al valore x_0 e lasciando variare y, possiamo considerare il

$$\lim_{y \to y_0} \frac{f(x_0, y) - f(x_0, y_0)}{y - y_0}$$

Se questo esiste ed è finito, esso si chiama *derivata prima parziale* rispetto a y della funzione f, nel punto (x_0, y_0) e si indica con

$$f\prime_y(x_0, y_0).$$

In pratica il calcolo delle due derivate parziali in un punto generico (x,y) interno al dominio si fa pensando la funzione f(x,y) come funzione di una sola delle due variabili e trattando l'altra come parametro costante.
Esempi.

- Da $f(x, y) = x^2 + 4xy + 3xy^2$, si ottiene $f\prime_x(x, y) = 2x + 4y + 3y^2$,$f\prime_y(x, y) = 4x + 6xy$.
- Da $f(x, y) = sin(x + x^2y)$, si ottiene $f\prime_x(x, y) = (1 + 2xy)cos(x + x^2y)$,$f\prime_y(x, y) = x^2cos(x + x^2y)$.

Gradiente

Consideriamo una funzione f(x,y) definita su un insieme aperto A $\subseteq R^2$ e sia $(x_0, y_0) \in$ A. Se esistono in (x_0, y_0) sia la derivata parziale rispetto ad x e rispetto ad y, $f\prime_x(x_0, y_0)$ e $f\prime_y(x_0, y_0)$ allora è possibile costruire un *vettore* che ha per componenti le derivate parziali:

$$\nabla f(x_0, y_0) = (f\prime_x(x_0, y_0), f\prime_y(x_0, y_0))$$

Il vettore prende il nome di *gradiente della funzione* f valutato in (x_0, y_0).

Derivate direzionali

Sia f :A $\subseteq R^2 \to R$ una funzione differenziabile in $(x_0, y_0) \in$ A.
Dato da un qualsiasi versore v = (a,b) (vettore di norma 1) risulta che :

- esiste la derivata direzionale f_v in (x_0, y_0);
- $f_v(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$.

In altre parole la derivata direzionale della funzione f lungo la direzione del versore v nel punto (x_0, y_0) è data dal prodotto scalare tra il gradiente della funzione valutato in (x_0, y_0) ed il versore v.
Soffermiamoci per un momento sulla formula del gradiente

$$f_v(x_0, y_0) = \nabla f(x_0, y_0) \cdot v$$

Dal punto di vista geometrico la derivata direzionale lungo v nel punto(x_0, y_0) indica la variazione di quota lungo la direzione data dal vettore v.

Piano tangente al grafico di una funzione di due variabili

Data una funzione di due variabili z= f(x,y) e un punto (x_0, y_0) del suo dominio, dove la funzione ammette derivate parziali prime *continue*, l'equazione del piano tangente alla superficie del grafico della funzione nel punto (x_0, y_0, z_0), con $z_0 = f(x_0, y_0)$ sarà :

$$z = f(x_0, y_0) + f\prime_x(x_0, y_0)(x - x_0) + f\prime_y(x_0, y_0)(y - y_0).$$

Teorema di Schwartz

Se le derivate seconde miste sono continue, allora esse sono uguali.