Definizione

Un'equazione differenziale è una uguaglianza che lega una funzione f con le sue *derivate* (di qualsiasi ordine).
In particolare un'equazione differenziale ordinaria è un'eqauzione differenziale in cui f è una funzione che ha una sola variabile indipendente.
Questo tipo di equazioni hanno innumerevoli applicazioni in diversi ambiti della scienza; per esempio servono a descrivere l'evoluzione di una popolazione di batteri.

Problema di Cauchy

Consideriamo una funzione y(x) di variabile reale, a valori in R. Un problema di Cauchy per y(x) è un sistema del tipo

$$\begin{cases} y\prime(x) & = F(y(x), x) \\ y(x_0) & = y_0 \end{cases}$$

Dove F è una funzione da R^2 a R e x_0, y_0 $\in$ R.
La condizione $y(x_0) = y_0$ è detta *condizione iniziale*.
I problemi di Cauchy sotto determinate condizioni per la funzione F, garantiscono che la soluzione esiste sempre ed è anche unica.

Equazioni Differenziali Lineari del Primo Ordine

$$u\prime + a(x)u = b(x)$$

$$A(x) = \int a(x)dx$$

$$u = e^{-A(x)} \cdot \int e^{A(x)} b(x)dx$$

Equazioni Differenziali a Variabili Separabili

$$u\prime = a(x)u$$

$$\frac{du}{dx} = a(x)u$$

$$\frac{du}{u} = a(x)dx$$

$$\int \frac{1}{u} du = \int a(x)dx$$

Equazioni Differenziali Lineari del Secondo Ordine

Dati a e b due numeri reali e $g(x)$ una funzione nell'incognita x.

$$y'' + ay' + by = g(x)$$

Le soluzioni sono nella forma

$$y = y_h + y_p$$

dove y_h è la soluzione generale, y_p una soluzione particolare.
Imposto l'equazione:

$$\lambda^2 + a\lambda + b = 0$$

Si possono presentare tre casi distinti:

- $\Delta > 0$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda_1 x} + C_2 e^{\lambda_2 x}$$

- $\Delta = 0$.

$$\lambda_1 = \lambda_2$$

$$y_h = C_1 e^{\lambda x} + C_2 x e^{\lambda x}$$

- $\Delta < 0$.

$$\lambda_{1,2} = \frac{-a \pm \sqrt{|\Delta|}i}{2}$$

$$\alpha = \frac{-a}{2}$$

$$\omega = \frac{\sqrt{|\Delta|}}{2}$$

$$y_h = C_1 e^{\alpha x} sin(\omega x) + C_2 x e^{\alpha x} cos(\omega x)$$

Esempio di applicazione:

$$z'' + 7z' + 10z = 0.$$

Ricerchiamo l'equazione caratteristica

$$\lambda^2 + 7\lambda + 10 = 0$$

le cui radici sono

$$\lambda_1 = -2, \quad \lambda_2 = -5.$$

L'integrale generale dell'equazione omogenea è quindi

$$z(t) = c_1 e^{-2t} + c_2 e^{-5t}, \quad c_1, c_2 \in \mathbb{R}.$$

Per trovare una soluzione particolare non esistono regole universali: solo la considerazione che sarà una funzione dello tipo di g(x).
Se g(x) è un polinomio, allora y_h sarà un polinomio.
Se g(x) è un'esponenziale, allora y_h sarà un'esponenziale.

ATTENZIONE: In tutti i casi di cui sopra, dopo aver risolto l'equazione differenziale, occorre usare le condizioni per determinare le costanti c e C.