Sia f una funzione continua sull'intervallo [a,b] e sia x un punto in [a,b]. Al variare di x in [a,b], l'integrale definito

$$\int_a^b f(t)dt$$

assume valori variabili, cioè una funzione di x, che indichiamo con F(x) e chiamiamo *funzione integrale*.

Teorema Torricelli-Barrow

Se f è continua in [a,b], allora la funzione integrale

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

è derivabile e risulta:

$$F\prime(x) = f(x),$$

cioè la funzione integrale F è una primitiva di f.

Teorema Fondamentale del Calcolo Integrale

L'integrale definito di una funzione continua f, calcolato sull'intervallo [a,b], è uguale alla differenza tra i valori che una qualunque primitiva di f assume agli estremi dell'intervallo d'integrazione:

$$\int_a^b f(t)dt = G(b) - G(a) = [G(x)]_a^b$$

Integrali Impropri

Sia f una funzione positiva tale che $\int_a^b f(t)dt$ è ben definito per ogni b > a, allora :

$$\int_a^{+\infty} f(t)dt = \lim_{b \to +\infty} \int_a^b f(t)dt$$

se il limite esiste finito.
Analogalmente

$$\int_{-\infty}^b f(t)dt = \lim_{a \to -\infty} \int_a^b f(t)dt$$

se $\int_a^{+\infty} f(t)dt$ è ben definito per ogni $-\infty$ < a < b e il limite esiste finito.

Integrazione per Sostituzione

Questo metodo si basa sul teorema di derivazione delle funzioni composte

$$\int f(x)dx = \int f(g(t))g\prime(x)dt$$

Dove g(t) è una funzione derivabile con derivata continua e invertibile.
In pratica, quando non si riesce a calcolare l'integrale della funzione f(x) operiamo una sostituzione introducendo una funzione ausiliaria x= g(t) per cui sappiamo calcolare $\int f(g(t))g\prime(x)dt$ e poi ritornare alla variabile x sostituendo $g^{-1}(x)$ al posto di t nelle primitive trovate.
Riassumendo i vari step:

- Si pone x=g(t) e si calcola dx= g'(t) dt;
- Si riscrive l'integrale in termini di t, sostituendo g(t) al posto di x e g'(t) dt al posto di dx e si calcola l'integrale nella variabile t così ottenuto;
- Si ritorna, infine, alla variabile x, eseguendo sul risultato la sostituzione inversa t= $g^{-1}(x)$.

Esempio di applicazione:

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \frac{t}{t^2-3t+2}\frac{1}{t}\,\mathrm{d}t = \int \frac{1}{t^2-3t+2}\,\mathrm{d}t\\ &= \int \frac{1}{(t-1)(t-2)}\,\mathrm{d}t\,.\end{aligned}$$

Si tratta dell'integrale di una funzione razionale il cui denominatore è decomposto in fattori irriducibili. Usiamo il metodo di decomposizione in fratti semplici:

$$\frac{1}{(t-2)(t-1)} = \frac{A}{t-2} + \frac{B}{t-1} = \frac{A(t-1)+B(t-2)}{(t-1)(t-2)}.$$

Ponendo dapprima $t = 2$ e successivamente $t = 1$, nell'uguaglianza

$$1 = A(t-1) + B(t-2),$$

si ottiene $A = 1$ e $B = -1$. Pertanto

$$\begin{aligned}\int \frac{e^x}{e^{2x}-3e^x+2}\,\mathrm{d}x &= \int \left(\frac{1}{t-2} - \frac{1}{t-1}\right)\,\mathrm{d}t\\ &= \log|t-2| - \log|t-1| + c\\ &= \log|e^x-2| - \log|e^x-1| + c.\end{aligned}$$

Integrazione per parti

Intuitivamente, dovendo fare l'integrale del prodotto di due funzioni, di una bisogna saperne fare l'integrale e dell'altra la derivata.
Se f e g sono due funzioni derivabili allora

$$\int f(x)g\prime(x)dx = f(x)g(x) - \int g(x)f\prime(x)dx$$

Esempio di applicazione:

$\int xsinx\mathrm{d}x$

$f(x) = x \to f'(x) = 1$

$g'(x) = sinx \to g(x) = -cosx$

$\int xsinx\mathrm{d}x = -xcosx - \int 1*(-cosx)\mathrm{d}x = -xcosx + \int cosx\mathrm{d}x = -xcosx + senx + c$