INTRODUZIONE DEL CALCOLO INTEGRALE

Il concetto di integrale nasce per risolvere due tipologie di problemi:

- Calcolo delle aree di figure delimitate da curve, calcolo di volumi, calcolo del lavoro di una forza, . . . $\rightarrow$ *integrale definito*;

- Problema inverso del calcolo della derivata, cioè data una funzione f, trovare una funzione F tale che F' = f $\rightarrow$ *integrale indefinito*.

INTEGRALE DEFINITO

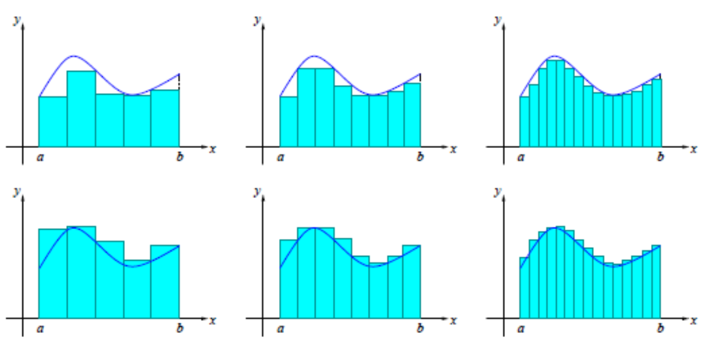
Data una funzione f definita e continua in [a,b], si chiama *integrale definito* di f sull'intervallo $[a, b]$ il limite

$$\lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} min_i \cdot l = \lim_{n\to+\infty}\sum_{i=1}^{n} MAX_i \cdot l = S$$

e si indica con il simbolo

$$\int_a^b f(x)dx.$$

Notiamo che aumentando il numero dei rettangoli l'approssimazione di S diventa sempre più precisa.



PROPRIETÀ DELL'INTEGRALE DEFINITO

- Proprietà degli estremi di integrazione

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_a^b f(x)dx.$$

- Proprietà degli estremi coincidenti

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

- Additività dell'integrale

$$\int_a^b [f(x) + g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx$$

- Omogeneità dell'integrale

$$\int_a^b [cf(x)]dx = c\int_a^b f(x)dx \qquad con\ c \in R$$

Le ultime due possono essere riassunte in un'unica proprietà:

- Linearità dell'integrale

$$\int_a^b [\alpha f(x) + \beta g(x)]dx = \alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx \;\; con\ \alpha, \beta \in R.$$

Funzioni Primitive

Si dice che F è una *primitiva* della funzione f in [a,b] se F è derivabile in [a,b] e risulta

$$F\prime(x) = f(x) \qquad \forall x \in [a, b].$$

Se F è una primitiva di f, allora anche la funzione

$$G(x) = F(x) + k$$

è una primitivadi f, qualunque sia k ∈ R.

In altre parole, una funzione ammette infinite primitive che differiscono tra loro per una costante reale e i cui grafici costituiscono una famiglia infinita di curve ottenibili per traslazione lungo l'asse y.

Integrale Indefinito

L'insieme di tutte le primitive di una funzione f si chiama *integrale indefinito* di f, si indica col simbolo

$$\int f(x)dx$$

e si legge " integrale indefinito di f(x) in dx ".

Integrali Indefiniti immediati

$$\int dx = x + C$$

$$\int x^{\alpha} dx = \frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + C\,, \quad \text{con} \;\; \alpha \neq -1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$$

$$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \operatorname{tg} x\, dx = -\ln|\cos x| + C$$

$$\int \operatorname{cotg} x\, dx = \ln|\operatorname{sen} x| + C$$

$$\int \frac{1}{\cos^2 x} dx = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\operatorname{sen}^2 x}\,dx = -\operatorname{cotg} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} x + C$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}}\,dx = \operatorname{arc\,sen} \frac{x}{a} + C\,, \quad a > 0$$

$$\int \frac{1}{1+x^2}\,dx = \operatorname{arc\,tg} x + C$$

$$\int \frac{1}{m^2 + x^2}\,dx = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{x}{m} + C$$

$$\int \frac{1}{m^2 + (x+k)^2}\,dx = \frac{1}{m} \operatorname{arc\,tg} \frac{x+k}{m} + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C$$

$$\int a^x\,dx = \frac{a^x}{\ln a} + C$$