Concavità e derivata seconda

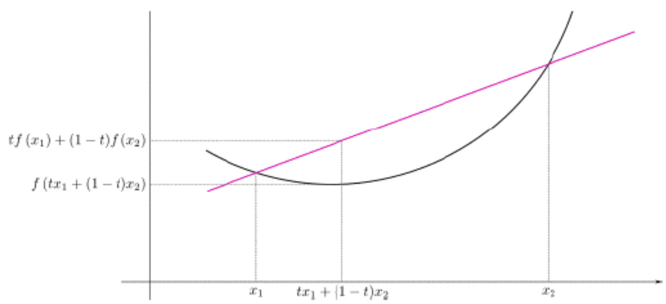
Una funzione f ha concavità verso l' *alto* negli intervalli del dominio in cui si ha f"(x) $>$ 0, verso il *basso* in quelli in cui si ha f"(x) $<$ 0.

Funzione convessa

Concavità verso l' alto: sta sotto la retta secante.
In formule:

$$f(x_1 t + (1-t)x_2) \leq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

$\forall$ x_1, x_2 e per ogni t $\in$ (0,1).



Funzione concava

Concavità verso il basso: sta sopra la retta secante.
In formule:

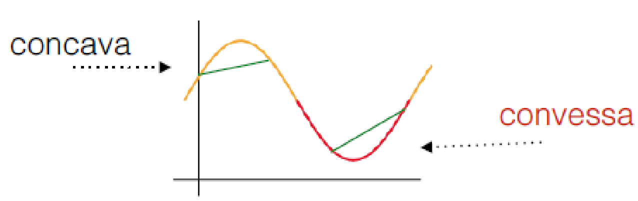
$$f(x_1 t + (1-t)x_2) \geq t f(x_1) + (1-t) f(x_2)$$

$\forall$ x_1, x_2 e per ogni t $\in$ (0,1).

Punti di flesso

I punti dove la concavità cambia si chiamano *punti di flesso*.
Se x_0 è un punto di flesso allora

$$f''(x_0) = 0.$$



Criterio della derivata seconda

Ricerca di minimi
Se f è derivabile due volte in un intervallo (a,b) e $f\prime(x_0) = 0 \quad f\prime\prime(x_0) > 0$ per un punto x_0 in (a,b), allora x_0 è un *punto di minimo* (*locale*).

Ricerca di massimi
Se f è derivabile due volte in un intervallo (a,b) e $f\prime(x_0) = 0 \quad f\prime\prime(x_0) < 0$ per un punto x_0 in (a,b), allora x_0 è un *punto di massimo* (*locale*).

Teorema di Fermat

Sia $y = f(x)$ una funzione con dominio D $\subseteq$ R. Se $x_0 \in$ D è un punto estremante per f, e la funzione è *derivabile* in quel punto, allora si ha che

$$f\prime(x_0) = 0.$$

Teorema di Lagrange

Sia $f(x) : [a, b] \rightarrow R$ una funzione continua in [a, b] e derivabile in (a,b). Allora esiste *almeno* un punto x_0 interno all' intervallo(a,b) tale che

$$f(b) - f(a) = f\prime(x_0)(b - a)$$

Studio di funzione

- Dominio di definizione;
- Limiti agli estremi del dominio;
- Intervalli di monotonia;
- Intervalli di convessità / concavità;
- Eventuali massimi e/o minimi locali e/o globali.

Ad esempio studio qualitativo della funzione:

$$f(x) = ln(x^2 + 1)$$

- campo di esistenza: $\mathbb{R}$
- comportamento agli estremi del dominio: $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty \qquad \lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
- monotonia: $f'(x) = \dfrac{2x}{x^2+1}$
  f è strettamente crescente in $(0, +\infty)$
  f è strettamente decrescente in $(-\infty, 0)$
  $x = 0$ è un punto critico di f
- eventuali punti di massimo e minimo:
  $x = 0$ è un punto di minimo assoluto, in cui f vale $f(0) = 0$
- convessità: $f''(x) = \dfrac{2(1-x^2)}{(x^2+1)^2}$
  f è convessa in $(-1, 1)$, f è concava in $(-\infty, -1)$ e in $(1, +\infty)$
  $x = -1$ e $x = 1$ sono punti di flesso