Numeri Complessi

Definizione

L'insieme dei numeri complessi è definito come l' insieme di tutte le coppie di numeri reali,ossia

$$C = R \times R$$

Su C sono definite due operazioni interne, un'operazione di somma e un'operazione di prodotto, che agiscono nel modo seguente

$$(a, b) + (c, d) = (a + c, b + d) \; \forall (a, b), (c, d) \in C$$
$$(a, b) \cdot (c, d) = (a \cdot c - b \cdot d, a \cdot d + b \cdot c) \; \forall (a, b), (c, d) \in C$$

Forma algebrica dei numeri complessi

Ogni numero complesso (a,b) si può esprimere in forma algebrica così come segue

$$(a, b) = a + ib$$

Il numero reale a si chiama *parte reale*, mentre il numro reale b si chiama parte immaginaria. Il numero complesso i viene detto *unit immaginaria*, e secondo la definizione risulta $i^2 = -1$. Le operazioni di somma e prodotto si estendono naturalmente ai numeri complessi espressi in forma algebrica

$$(a + ib) + (c + id) = a + ib + c + id = a + c + i(b + d)$$
$$(a + ib) \cdot (c + id) = ac + iad + ibc + i^2bd = ac - bd + i(ad + bc)$$

Complesso coniugato

Dato un numero complesso z=(a,b)= a + ib, il suo complesso coniugato è $\bar{z}$= (a,- b) = a - ib.

Modulo e fase

Dato un numero complesso z= a + ib, si definisce *modulo* di z la quantità M= $\sqrt{a^2 + b^2}$, si definisce invece $fase$, o argomento, di z, la quantità θ=arctg $(\frac{b}{a})$.

Rappresentazione in forma trigonometrica

Ogni numero complesso z= a + ib può essere espresso in modulo e fase, così come segue

$$z = M(cos(\theta) + isin(\theta))$$

Si noti che in questa rappresentazione il complesso coniugato si scrive come

$$\bar{z} = M(cos(\theta) - isin(\theta))$$

Formula di Eulero

Tramite gli sviluppi in serie di Taylor di seno, coseno e esponenziale di può ottenere la seguente formula:

$$e^i\theta = cos(\theta) + isin(\theta) \; \forall \theta \in R$$

Rappresentazione in forma esponenziale

Ogni numero complesso z= a + ib, con modulo M e fase θ, può essere espresso in forma esponenziale nel modo seguente

$$z = Me^i\theta$$

Si noti che in questa rappresentazione il complesso coniugato si scrive come

$$\bar{z} = Me^{-i\theta}.$$

Formule di De Moivre

Dati due numeri complessi, $z_1 = M_1(cos(\theta_1) + isin(\theta_1))\, e\, z_2 = M_2(cos(\theta_2) + isin(\theta_2))$, valgono le seguenti formule

$$z_1 \cdot z_2 = M_1 M_2(cos(\theta_1 + \theta 2) + isin(\theta_1 + \theta 2))$$

$$\frac{z_1}{z_2} = \frac{M_1}{M_2}(cos(\theta_1 - \theta_2) + isin(\theta_1 - \theta_2)) con z_2 \neq 0.$$

Dato z ∈ C, detto M il suo modulo e θ la sua fase, risulta

$$z^n = M^n(cos(n\theta) + isin(n\theta))$$

Serie Numeriche

Definizione

Data la successione $\{a_n\} = a_1, a_2, a_3, ..., a_n, ...$ si condiderino le somme parziali $s_1, s_2, ..., s_n$:

$$s_1 = a_1 \quad s_2 = a_1 + a_2 \quad s_3 = a_1 + a_2 + a_3 \quad s_n = a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_n$$

si dice *serie* di termini generalea_n e si indica con $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$

$$\lim_{n\to+\infty} s_n = S = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$$

Carattere della serie

- se S è finito $\Longrightarrow$ la serie $\sum a_n$ si dice *convergente*;
- se S$= \pm$inf $\Longrightarrow$ la serie $\sum a_n$ si dice *divergente*;
- altrimenti $\Longrightarrow$ la serie $\sum a_n$ è *indeterminata* ;

Alcune Proprietà

- se $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} s_n = 0$
  Condizione necessaria ma non sufficiente per la convergenza di una serie è che il termine generico sia infinitesimo.

  Date $\sum a_n$ e $\sum b_n$ e $\lambda \in$ R

- se $\sum a_n$ converge $\Longrightarrow \sum \lambda a_n$ converge
  Convergenza del prodotto di una costante per una serie.
- se $\sum a_n$ e $\sum b_n$ convergono $\Longrightarrow \sum(a_n + b_n)$ converge
  convergenza della somma di due serie .

Serie Notevoli

$$\sum_{n=1}^{\infty} r^n \quad \begin{cases} \text{diverge a } +\infty & r \geq 1 \\ \text{converge} & -1 < r < 1 \Rightarrow \text{la somma è } \dfrac{1}{1-r} \\ \text{irregolare} & r = -1 \\ \text{diverge} & r < -1 \end{cases}$$

(serie geometrica di ragione r)

$$\text{Se } |r| < 1 \qquad \sum_{n=1}^{\infty} a \cdot r^{n-1} = \frac{a}{1-r} \qquad \sum_{n=k}^{\infty} r^n = \frac{r^k}{1-r}$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \quad \begin{cases} \text{converge} & p > 1 \\ \text{diverge} & p \leq 1 \end{cases}$$

(serie armonica generalizzata)

Scale Logaritmiche

Una funzione y=f(x) può essere rappresentata in *scala logaritmica* ponendo

$$X = log_\alpha x, \quad Y = log_\alpha y.$$

Da notare che y=f(x) diventa

$$Y = log_\alpha(f(\alpha^X)).$$

Utilizzo

- Rappresentare misure positive con ordini di grandezza molto diversi fra loro;
- Linearizzare funzioni esponenziali y= K $\cdot a^x$ $\rightarrow$ Scale Semilogaritmiche;
- Linearizzare funzionipotenza y= A $\cdot x^b$ $\rightarrow$ Scale Logaritmiche;

Per ottenere forme più semplici da eleborare, ad esempio:

$$f(x) = K \cdot x^b$$

diventa

$$log_\alpha(f(\alpha^X)) = log_\alpha(K) + log_\alpha(a^{Xb}) = log_\alpha(K) + bX$$

funzione lineare riconducibile all' equazione generale di una retta $y = mx + q$ con coefficiente angolare m = b e intercetta q= $log_\alpha K$.

Scale Logaritmiche

Trasformazioni di variabili:

$$X = log_{10} x \quad Y = log_{10} y.$$

Scala logaritmica sull' asse delle ascisse X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y.

Scale Semilogaritmiche

Trasformazioni di variabili:

$$X = x \quad Y = log_{10} y.$$

Scala lineare sull' asse delle X e scala logaritmica sull'asse delle ordinate Y (o viceversa).