LIMITI NOTEVOLI

Limite	Forma di indeterminazione
$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$	" $\frac{0}{0}$ "
$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$	" $\frac{0}{0}$ "
$\lim_{x\to +\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$	" 1^∞ "
$\lim_{x\to 0^+} x\ln x = 0$	" $0\cdot\infty$ "
$\lim_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1$	" $\frac{0}{0}$ "
$\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{x} = 1$	" $\frac{0}{0}$ "
$\lim_{x\to 0} \frac{\arcsin x}{x} = 1$	" $\frac{0}{0}$ "
$\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x}{x} = 1$	" $\frac{0}{0}$ "

DEFINIZIONE DI CONTINUITÀ

Una funzione di equazione y = f(x), definita in un intorno di x_0, si dice continua nel punto x_0 quando esiste il limite della funzione per x che tende ad x_0 e questo limite è uguale al valore della funzione in quel punto, cioè quando:

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$

Ricordando la definizione di limite possiamo dire che la funzione f(x) è continua nel punto x $=x_0$ quando, considerato un numero positivo ϵ arbitrariamente piccolo, è possibile trovare un intorno di x_0 per tutti i punti del quale, compreso x_0, si abbia:

$$\|f(x) - f(x_0)\| \prec \epsilon$$

ovvero

$$f(x_0) - \epsilon \prec f(x) \prec f(x_0) + \epsilon$$

Pertanto dalla definizione si deduce che una funzione f(x) è continua in un punto x_0 quando sono verificate le seguenti condizioni:

- esiste il valore della funzione nel punto x_0;
- esiste ed è finito il limite della funzione per x che tende a x_0;

- il limite della funzione per x che tende a x_0 coincide con il valore della funzione nel punto x_0;

Nota:
Una funzione si dice continua a sinistra in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$$

Una funzione si dice continua a destra in x_0 se

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$$

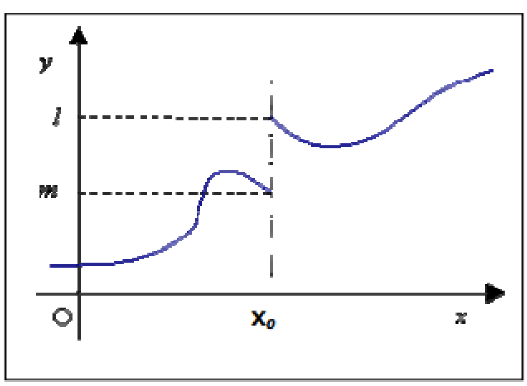
DEFINIZIONE: Una funzione f(x) è continua in un intervallo I se è continua in *tutti* i punti dell'intervallo.

Una funzione y = f(x) è continua in un punto x = x_0 se sono verificate contemporaneamente tre condizioni.
Quando anche solo una delle tre condizioni non è verificata, allora in tale punto la funzione è *discontinua* e x = x_0 viene detto punto di discontinuità per la funzione (o punto singolare).

Discontinuità di prima specie (a salto)

Si ha una **discontinuità di 1ª specie o di tipo "a salto"** quando, al tendere di x a x_0, esistono finiti ma diversi fra loro, sia il limite sinistro sia il limite destro della funzione.

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) \neq \lim_{x\to x_0^+} f(x)}$$

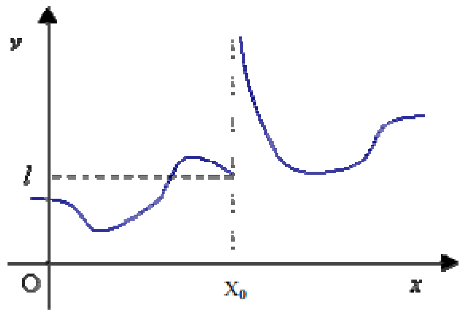


Il valore assoluto della differenza fra il limite destro e quello sinistro si definisce **"salto"**:

$$s = \left|\lim_{x\to x_0^+} f(x) - \lim_{x\to x_0^-} f(x)\right|$$

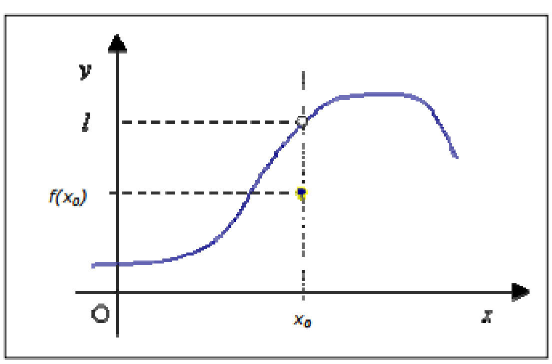
Discontinuità di seconda specie

Si ha una **discontinuità di 2ª specie** quando, al tendere di x a x_0, almeno uno fra i due limiti sinistro e destro o non esiste, oppure esiste ma è infinito.



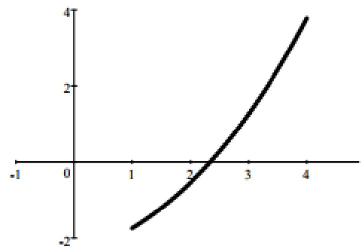
Discontinuità di terza specie

Si ha una **discontinuità di 3ª specie (discontinuità di tipo "buco", discontinuità "eliminabile")** quando, al tendere di x a x_0, la funzione tende ad un limite finito $l \in \Re$, ma $f(x_0)$ o non esiste o è diversa dal valore del limite.



Teoremi sulle funzioni continue

♦ **Teorema <u>degli zeri</u>** *Se f è continua in un intervallo $[a,b]$, ed ha segni discordi in $x = a$ e $x = b$, <u>allora</u> esiste almeno un $x_0 \in (a,b)$ in cui si ha $f(x_0) = 0$.*



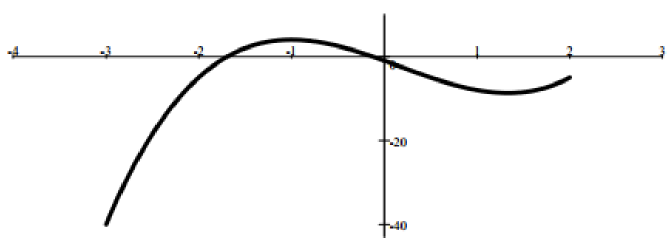
$a = 1$, $b = 4$; $f(a) < 0 < f(b)$

♦ **Teorema di <u>Darboux</u> (o dei <u>valori intermedi</u>)** *Se f è continua in un intervallo $[a,b]$, assume tutti i valori compresi tra $f(a)$ ed $f(b)$.*

a) Attenzione, non si sostiene che f assume <u>solo</u> i valori compresi tra $f(a)$ e $f(b)$, ma che almeno una volta <u>tutti</u> quei valori vengono assunti. Ad esempio, consideriamo la funzione $f(x) = \cos x$, e l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$. Si ha $f\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{1}{2}$, $f\left(\frac{8\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$, e quindi il teorema garantisce che tutti i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$ vengono assunti da f quando x percorre l'intervallo $\left[\frac{\pi}{3}, \frac{8\pi}{3}\right]$.
Vale la pena osservare che in questo intervallo la f assume per ben tre volte i valori compresi tra $-\frac{1}{2}$ e $\frac{1}{2}$, ed assume anche tutti i valori compresi tra $\frac{1}{2}$ e 1 e tutti quelli compresi tra -1 e $-\frac{1}{2}$.

b) Una buona traduzione intuitiva di questo teorema può essere *"Una funzione continua in un intervallo non fa salti"*.

♦ **Teorema di <u>Weierstrass</u>** *Se f è continua in un intervallo $[a,b]$, assume massimo e minim (assoluti) in $[a,b]$.*



$f(x) = 2x^3 - x^2 - 8x - 1$; $\max\limits_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-1) = 4$; $\min\limits_{x\in[-3,2]} f(x) = f(-3) = -40$.