Definizione

Si introduce il concetto di *limite* quando si vuole studiare il comportamento di una funzione y=f(x) quando la x è prossima ad un certo valore x_0 oppure quando la x tende a crescere verso l'infinito.
Studiare un limite, quindi, non significa affatto sapere il valore di una funzione in un determinato punto, ma significa capire cosa succede nei pressi di quel punto.

In maniera formale:

Sia $f: A \to R$ una funzione numerica definita su un intervallo (o insieme di intervalli) A e sia x_0 un punto interno ad A oppure un suo estremo (eventualmente $+\infty$). Si dice che la funzione f tende verso l (che può essere un numero reale o $+\infty$) se per ogni intorno I di l è possibile determinare un intorno J di x_0 in modo tale che si abbia:

$\forall x \in A \cap J - \{x_0\} \quad \to \quad f(x) \in I$ (cioè le immagini di tutti i numeri x di J (escluso x_0) sono in I).

Analizzando ora diversi casi troviamo che:

CASO 1	- x_0 finito - l finito	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero l per x tendente al numero x_0 se per ogni numero positivo ε ("piccolo a piacere") esiste un numero positivo δ tale che $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \quad \to \quad \lvert f(x)-l \rvert < \varepsilon$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = l$
CASO 2	- x_0 finito - l vale $+\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x tendente al numero x_0 se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo δ tale che $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \quad \to \quad f(x) > H$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty$
CASO 3	- x_0 finito - l vale $-\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x tendente al numero x_0 se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo δ tale che $\forall x \in (x_0-\delta, x_0+\delta) - \{x_0\} \quad \to \quad f(x) < -H$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty$
CASO 4	- x_0 vale $+\infty$ - l finito	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero l per x tendente a $+\infty$ se per ogni numero positivo ε ("piccolo a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x > K \quad \to \quad \lvert f(x)-l \rvert < \varepsilon$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = l$
CASO 5	- x_0 vale $+\infty$ - l vale $+\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x tendente a $+\infty$ se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x > K \quad \to \quad f(x) > H$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = +\infty$
CASO 6	- x_0 vale $+\infty$ - l vale $-\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x tendente a $+\infty$ se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x > K \quad \to \quad f(x) < -H$	$\lim_{x \to +\infty} f(x) = -\infty$
CASO 7	- x_0 vale $-\infty$ - l finito	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite il numero l per x tendente a $-\infty$ se per ogni numero positivo ε ("piccolo a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x < -K \quad \to \quad \lvert f(x)-l \rvert < \varepsilon$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = l$
CASO 8	- x_0 vale $-\infty$ - l vale $+\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $+\infty$ per x tendente a $-\infty$ se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x < -K \quad \to \quad f(x) > H$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$
CASO 9	- x_0 vale $-\infty$ - l vale $-\infty$	Si dice che la funzione $f(x)$ ha per limite $-\infty$ per x tendente a $-\infty$ se per ogni numero positivo H ("grande a piacere") esiste un numero positivo K tale che se $x < -K \quad \to \quad f(x) < -H$	$\lim_{x \to -\infty} f(x) = -\infty$

Funzioni elementari

1. Funzione potenza

$\lim_{x\to+\infty} x^n=+\infty$, se n è intero positivo; $\lim_{x\to-\infty} x^n=\begin{cases}-\infty \text{ , se } n \text{ è intero positivo dispari} \\ +\infty \text{ , se } n \text{ è intero positivo pari}\end{cases}$

$\lim_{x\to+\infty} x^r=+\infty$, se r è un numero ***reale positivo*** qualsiasi;

$\lim_{x\to0^+} x^r=0$, se r è un numero ***reale positivo*** qualsiasi

2. Funzione radice

$\lim_{x\to+\infty} \sqrt[n]{x}=+\infty$, se n è intero positivo; $\lim_{x\to-\infty} \sqrt[n]{x}=-\infty$, se n è intero positivo ***dispari***.

3. Funzione esponenziale

$\lim_{x\to-\infty} a^x=\begin{cases}0 \text{ , se } a>1 \\ +\infty \text{ , se } 0<a<1\end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} a^x=\begin{cases}+\infty \text{ , se } a>1 \\ 0 \text{ , se } 0<a<1\end{cases}$

4. Funzione logaritmo

$\lim_{x\to0^+} \log_a(x)=\begin{cases}-\infty \text{ , se } a>1 \\ +\infty \text{ , se } 0<a<1\end{cases}$ $\lim_{x\to+\infty} \log_a(x)=\begin{cases}+\infty \text{ , se } a>1 \\ -\infty \text{ , se } 0<a<1\end{cases}$

5. Funzione tangente

$\lim_{x\to\left[-\frac{\pi}{2}\right]^+} \tan(x)=-\infty$ e più in generale, per la periodicità: $\lim_{x\to\left[-\frac{\pi}{2}+k\pi\right]^+} \tan(x)=-\infty$

$\lim_{x\to\left[\frac{\pi}{2}\right]^-} \tan(x)=+\infty$ e più in generale, per la periodicità: $\lim_{x\to\left[\frac{\pi}{2}+k\pi\right]^-} \tan(x)=+\infty$

6. Inverse delle funzioni circolari:

$\lim_{x\to[-1]^+} \arcsin(x)=-\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to1^-} \arcsin(x)=\frac{\pi}{2}$

$\lim_{x\to[-1]^+} \arccos(x)=\pi$ $\lim_{x\to1^-} \arccos(x)=0$

$\lim_{x\to+\infty} \arctan(x)=\frac{\pi}{2}$ $\lim_{x\to-\infty} \arctan(x)=-\frac{\pi}{2}$

Teoremi sui limiti

Alcuni teoremi sono fondamentali per lo sviluppo della teoria e per il calcolo dei limiti.

- teorema di unicità del limite;
- teorema di permanenza del segno;
- teorema del confronto;
- operazioni sui limiti;

1. Teorema di unicità del limite

Se esiste il limite l (finito o infinito) della funzione per x tendente a x_0 (finito o infinito), tale limite è finito. Il teorema attesta che se il limite esiste, esso è unico in ciascuno dei nove casi analizzati.

2. Teorema di permanenza del segno

Se il limite l (finito o infinito) della funzione per x tendente a x_0 (finito o infinito) esiste ed è diverso da zero, allora esiste un intorno J di x_0 in ogni punto del quale (escludendo x_0) la funzione assume lo stesso segno del suo limite.

3. Teorema del confronto (o dei due carabinieri)

Se f(x),h(x) e g(x) sono tre funzioni definite nello stesso intervallo (eccettuato al più il numero x_0) e se per ogni x risulta

$$f(x) \leq h(x) \leq g(x)$$

e se, inoltre, è

$$lim_{x\to x_0} f(x) = lim_{x\to x_0} g(x) = l \quad (finito\ o\ infinito)$$

allora risulta anche

$$lim_{x\to x_0} h(x) = l$$

DIMOSTRAZIONE

Anche in questo caso la dimostrazione discende dalla definizione. Se si fissa un intorno arbitrario I di l, esiste per le ipotesi poste un opportuno intorno J di x_0 in ogni punto del quale (ad esclusione di x_0) risultano contemporaneamente vere le seguenti:

$$\begin{cases} f(x) \leqslant h(x) \leqslant g(x) \\ f(x) \in I \\ g(x) \in I \end{cases}$$

da cui segue immediatamente $h(x) \in I$. Vista l'arbitrarietà di I, è immediata la tesi.

4. Operazioni sui limiti

Esistano i due limiti $\lim_{x\to x_0} f_1(x) = l_1$ e $\lim_{x\to x_0} f_2(x) = l_2$, con x_0 finito o infinito. Si ha:

- se l_1 e l_2 sono numeri (cioè valori finiti) allora
  1. $\lim_{x\to x_0} [f_1(x) \pm f_2(x)] = l_1 \pm l_2$
  2. $\lim_{x\to x_0} [f_1(x) \cdot f_2(x)] = l_1 \cdot l_2$
  3. $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{l_1}{l_2}$ purché $l_2 \neq 0$
  4. se $l_1 \neq 0$, $l_2 = 0$ e $f_2(x) \neq 0$ in un intorno di x_0, allora $\lim_{x\to x_0} \frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \infty$, ove il segno va studiato tenendo conto dei segni delle due funzioni.
  5. $\lim_{x\to x_0} |f_1(x)| = |l_1|$ (idem per l'altra funzione)

- se uno o entrambi i limiti l_1 e l_2 sono infiniti, le operazioni sono possibili solo in alcuni casi, riassunti simbolicamente dalla seguente tabella – **NB**: *k è un numero, inoltre continua a valere la regola dei segni.*

$k \pm \infty = \pm\infty$	$+\infty + \infty = +\infty$	$-\infty - \infty = -\infty$	
$k \cdot \infty = \infty$, $k \neq 0$	$\frac{k}{\infty} = 0$	$\frac{\infty}{k} = \infty$, $k \neq 0$	$\infty \cdot \infty = \infty$

Queste nozioni teoriche sulle operazioni non permettono di definire i seguenti casi, noti con il nome di *forme indeterminate*:

- $\infty - \infty$;
- $\frac{0}{0}$;
- $\frac{\infty}{\infty}$;
- $\infty * 0$;