Tutorato di analisi 1

Alen Kushova

Collegio Volta

Introduzione

- Integrazione alla Riemann
- Integrale orientato
- Linearità dell'integrale
- Teorema fondamentale del calcolo
- Regole di calcolo
- Integrali impropri

Integrazione alla Riemann

Quando introduciamo la teoria dell'integrazione alla Riemann è fondamentale introdurre qualche preconcetto

- Dato $[a, b]$ intervallo reale, lo possiamo suddividere in tanti intervallini $A_k = [x_k, x_{k+1}]$ dove abbiamo preso $a = x_0 < x_1 < ... < x_n = b$. L'insieme degli n intervalli viene detto suddivisione di [a,b].
- Data una funzione f limitata su [a,b], introduco $I = \sum_{k=1}^{n}[\inf_{x \in A_k} f(x)]$ e anche $S = \sum_{k=1}^{n}[\sup_{x \in A_k} f(x)]$, rispettivamente detti somma inferiore e somma superiore di f in $[a, b]$.

Immaginiamo ora di rendere sempre più fine la suddivisione, cioè n tende a $+\infty$, allora $I \leq S$ ma potrebbero essere uguali al passaggio al limite. Se questo succede abbiamo che la funzione f si dice integrabile su $[a, b]$.

Integrale orientato

Def: L'integrale della funzione f su $[a, b]$ è dato dal valore $I = S$ chesi indica con :

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

Osservazione: se volessi integrare sull'intervallo $[a, b]$ orientato negativamente, cioè $b < a$, definiamo quello che si chiama integrale orientato:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = -\int_b^a f(x)\,\mathrm{d}x \tag{2}$$

é immediato osservare che vale:

$$\int_a^a f(x)\,\mathrm{d}x = 0 \tag{3}$$

Teoremi

Teorema (Linearità dell'integrale): Siano f e g funzioni reali e continue definite su $[a, b]$ e si consideri $\lambda \in \mathbb{R}$ allora vale:

$$\int_a^b f(x) + g(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\,\mathrm{d}x \tag{4}$$

$$\int_a^b \lambda f(x)\,\mathrm{d}x = \lambda \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{5}$$

Teorema: Sia f una funzione reale e integrabile su I intervallo di $\mathbb{R}$, comunque prendo $a, b, c \in I$ vale la relazione:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{6}$$

Teorema fondamentale del calcolo integrale

Enunciamo ora quello che è lo strumento fondamentale per poter calcolare l'integrale di una funzione f definita su un intervallo $[a, b]$ e a valori in $\mathbb{R}$:

Def: La funzione $F : [a, b] \to \mathbb{R}$ definita da:

$$F(x) := \int_a^x f(x)\mathrm{d}x \tag{7}$$

è detta funzione integrale di f. Se f è limitata allora F è continua, se f è continua si vede che F è una funzione C^1 e vale che $F' = f$. Si dice quindi che F è una primitiva della funzione f

Teorema: Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione integrabile che ammette una primitiva F allora vale:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a) \tag{8}$$

Regole di calcolo

Integrazione per parti: Date f e g due funzioni continue su $[a, b]$ e a valori in $\mathbb{R}$ e chiamiamo rispettivamente F e G due loro primitive abbiamo allora:

$$\int_a^b F(x)g(x)\,\mathrm{d}x = [F(x)G(x)]|_a^b - \int_a^b f(x)G(x)\,\mathrm{d}x \tag{9}$$

(La formula è facilmente ricavabile a partire dalla formula di Leibniz per la derivata del prodotto di due funzioni)

Integrazione per sostituzione: Sia f continua su $[a, b]$ e sia $\phi : [\alpha, \beta] \to [a, b]$ una funzione C^1, con $\phi(\alpha) = a$ e $\phi(\beta) = b$, allora vale:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_\alpha^\beta f(\phi(t))\,\phi'(t)\,\mathrm{d}t \tag{10}$$

Ricordiamoci che $\alpha = \phi^{-1}(a)$ e $\beta = \phi^{-1}(b)$.

Integrale impropri

Nella pratica le funzioni continue su intervalli limitati non sono l'unica classe di funzioni integrabili. Per questa ragione introduciamo la definizione di integrale improprio alla Riemann.

Data f una funzione continua definita su $[a, b)$, posso supporre $b < +\infty$ con f che non è limitata in $[a, b]$, oppure $b = +\infty$, e in questi casi possiamo considerare $\forall c \in [a, b)$ la quantità $\int_a^c f(x)\mathrm{d}x$ allora:

Def: Viene detto integrale improprio della funzione f in (a, b) la quantità:

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x := \lim_{c \to b^-} \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x \tag{11}$$

qualora il limite esista finito.