Tutorato di analisi 1

Alen Kushova

Collegio Volta

Introduzione

- Derivata
- Interpretazione geometrica
- Differenziabilità
- Regole di calcolo
- Esercizi

Derivata

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ una funzione e sia $x_0 \in [a, b]$ allora $\forall\ x$ vicino a x_0 è detta *rapporto incrementale di f in x_0* la quantità:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{1}$$

Dove abbiamo solo sostituito l'incremento $x - x_0$ con la variabile h.

Def: La *derivata* di f nel punto x_0 è il limite per x che tende a x_0 del rapporto incrementale ovvero:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h} \tag{2}$$

La funzione f diremo che è derivabile nel punto x_0 se esiste finito il valore della sua derivata. La derivata della funzione f nel punto x_0 solitamente è indicata con i simboli:

$$f'(x_0) \quad oppure \quad \frac{df}{dx}|_{(x=x_0)} \quad oppure \quad Df(x_0) \tag{3}$$

Abbiamo allora che f è derivabile in un punto se esiste finito il limite di questo rapporto incrementale nel punto ma come possiamo interpretare questo limite ? Diamo allora un'occhiata alla seguente figura ottenuta a partire dalla funzione $f = x^2 + 2x + 1$.

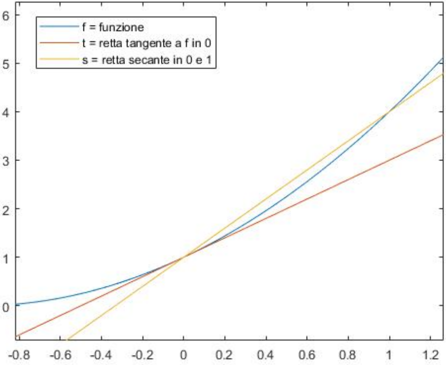

Figura 1: Questo è quello che accade: la retta passante per $x_0 = 0$ che ha come coefficente angolare la derivata della funzione valutata nel punto è proprio la retta tangente al grafico di f nel punto x_0

Derivate successive

Osservazione: Abbiamo allora definito la derivata in un punto come limite per x che tende a x_0 del rapporto incrementale. In che modo allora possiamo ottenere questo limite ?
Ci possiamo infatti avvicinare al punto x_0 da destra oppure da sinistra allora sarà richiesto che esistano quindi finiti entrambi i limiti!

Osservazione: se la funzione f è derivabile in ogni punto allora si viene a creare una funzione $f' : [a, b] \to \mathbb{R}$ che agisce in questo modo: $x \mapsto f'(x)$ se ora ripetiamo quanto fatto per la funzione f sulla funzione f' otteniamo quella che vine chiamata *derivata seconda della funzione* f. E possiamo andare avanti in questo modo.

Def: la derivata n-esima della funzione f è definita per induzione in questo modo:

$$D^n f = D(D^{n-1} f) \tag{4}$$

e solitamente viene indicata con il simbolo $f^{(n)}$

Differenziabilità

Sia $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ abbiamo allora che la derivata di f in x_0 è:

$$\lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) \tag{5}$$

Con l'ausilio del simbolo di Landau "o-piccolo" possiamo allora scrivere, al posto del limite, che:

$$\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0) + o(|x - x_0|) \tag{6}$$

e ora sostituendo h come incremento $x - x_0$ e riordinando i termini abbiamo che:

$$f(x) = f(x_0) + hf'(x_0) + o(h^2) \tag{7}$$

stiamo perciò "differenziando" la funzione f con una retta ed un resto infinitesimo al tendere di h a zero.

Regole di calcolo

Siano f e g due funzioni reali definite su [a,b] e x_0 un punto interno ad [a,b], se f e g sono derivabili in x_0 allora vale anche che:

1. la funzione $f + g$ e la funzione $f - g$ sono derivabili in x_0 e vale la regola:

$$(f \pm g)'(x_0) = f'(x_0) \pm g'(x_0) \tag{8}$$

2. La funzione fg è derivabile in x_0 e vale la regola di Leibniz:

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0) \tag{9}$$

3. Se poi $f(x_0) = 0$ allora è derivabile anche la funzione $\frac{1}{f}$ (che è ben definita in un intorno I di x_0, per il teorema della permanenza del segno) e vale la formula

$$\left(\frac{1}{f}\right)'(x_0) = -\frac{f'(x_0)}{f(x_0)^2} \tag{10}$$

Proseguendo abbiamo i seguenti due teoremi:

1. **Teorema di derivazione della funzione composta:**
Sia U un intorno di x_0 e f una funzione definita su U a valori reali che sia derivabile in x_0. Sia ora g definita su V intorno di $f(x_0)$ con $f(U) \subset V$, anche lei a valori reali e derivabile in $f(x_0)$, allora la funzione $g \circ f$ è derivabile in x_0 e vale che:
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0))f'(x_0) \tag{11}$$

2. **Teorema di derivazione della funzione inversa:**
Sia f definita su I intorno di x_0 e a valori reali con f invertibile su I. Se f è derivabile in x_0 con $f'(x_0) \neq 0$ allora la funzione inversa f^{-1} è derivabile in $y_0 = f(x_0)$ e vale:
$$(f^{-1})'(y_0) = \frac{1}{f'(x_0)} \tag{12}$$