Tutorato di analisi 1

Alen Kushova

Collegio Volta

Introduzione

- Funzioni continue
- Classe delle funzioni continue
- Limiti
- Calcolo dei limiti

Funzioni continue

Dati due spazi metrici X e Y, sia $f : X \to Y$ e consideriamo $x_0 \in X$ e il punto $y_0 = f(x_0) \in Y$ allora abbiamo la seguente definizione:

Def: La funzione f si dice *continua nel punto* x_0 se per ogni intorno J di y_0 esiste un intorno I di x_0 tale che $f(I) \subset J$

Noi saremo interessati in sostanza ai casi in cui $X = \mathbb{R}^n$ e $Y = \mathbb{R}^m$, allora abbiamo che $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ è continua in $x_0 \in \mathbb{R}^n$ se per ogni $B_\epsilon(f(x_0))$ esiste una $B_\delta(x_0)$ tale che $f(B_\delta(x_0)) \subset B_\epsilon(f(x_0))$.

Esempio: $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 se $\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta > 0$ tale che $\forall\ x$ che soddisfa $|x - x_0| \leq \delta$ vale che $|f(x) - f(x_0)| \leq \epsilon$. Questa dovrebbe essere la definizione di continuità della funzione f in un punto x_0 che viene fornita alle scuole superiori. La nozione data con gli intorni è effettivamente l'estensione agli spazi metrici generici.

La classe delle funzioni continue - pt.1

Def: la funzione f si dice *continua* se è continua in ogni punto del suo dominio.

Sono continue le seguenti funzioni:

1. La funzione $Id : X \to X$
2. Le funzioni costanti $f : X \to Y$ (quindi $f(x) = c \forall x \in X$)
3. La proiezione all'i-esimo fattore $\pi_i : X_1 \times ... \times X_n \to X_i$ che associa al vettore $(x_1, ..., x_n)$ l' elemento i- esimo x_i

Teorema: La composizione h di due funzioni $f,\ g$ continue è ancora una funzione continua.

La classe delle funzioni continue - pt.2

In ambito reale sono utilissime le seguenti funzioni continue:

1. Somma:$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dove $Somma(a, b) = a + b$;
2. Opposto:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dove $Opposto(a) = -a$;
3. Moltiplicazione:$\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dove $Molt.(a, b) = ab$;
4. Reciproco:$\mathbb{R} - \{0\} \to \mathbb{R} - \{0\}$ dove $Reciproco(a) = \frac{1}{a}$;
5. Modulo:$\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dove $Modulo(a) = |a|$.

Osservazione: Date due funzioni f e g continue allora è continua anche la funzione somma $f + g$ e anche la funzione prodotto fg (e se $g(x) \neq 0$, anche $\frac{f(x)}{g(x)}$). Possiamo anche dire che le funzioni $-f$, $|f|$,f^+,f^- sono continue. Infine anche le funzioni $max\{f, g\}$ e $min\{f, g\}$ lo sono.

Limiti

La nozione di limite nasce spontaneamente dalla richiesta di poter estendere con continuità, ad un dominio più ampio, una data funzione f. Se volessi estendere f in x_0 punto isolato, qualsiasi valore attribuito a $f(x_0)$ manterrebbe la funzione continua. Per punti x_0 di accumulazione per il dominio di f non è sempre possibile estendere con continuità la funzione. Vediamo allora la definizione di **limite** in generale:

Def: Sia A un sottoinsieme di $\mathbb{R}^n$ e x_0 un punto di accumulazione per A, sia $f : A \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}^m$ e $L \in \mathbb{R}^m$. Diciamo che L è il limite per x che tende a x_0 se vale che per ogni intorno I di L esiste un intorno J di x_0 tale che $f(x) \in I$ per ogni $x \in J \cap A$. Indichiamo allora :

$$L = \lim_{x \to x_0} f(x) \tag{1}$$

Unicità del limite

Caso reale: se f è una funzione reale definita su $A \subset \mathbb{R}$ allora vale la definizione con gli epsilon e i delta:
$\forall\ \epsilon > 0\ \exists\ \delta > 0$ tale che $\forall\ x : |x - x_0| \leq \delta$ vale che $|f(x) - L| \leq \epsilon$.

Osservazione: la definizione data di limite si estende nel caso in cui gli intorni I e J siano intorni di $\pm\infty$.
Ricordiamo allora che I è un intorno di $+\infty$ se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $(a, +\infty) \subset I$ analogamente è intorno di $-\infty$ se esiste $a \in \mathbb{R}$ tale che $(-\infty, a) \subset I$.

Teorema: Sotto le ipotesi e le notazioni della definizione di limite, se il limite L esiste, allora esso è unico.

Limiti e continuità

Possiamo dire che la funzione $f : A \to \mathbb{R}$ è continua in x_0 punto di accumulazione per $A \subset \mathbb{R}$, se esiste il limite per x che tende ad x_0 e vale l'uguaglianza:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = f(x_0) \tag{2}$$

Se questo non accade si dice che la funzione f è discontinua in x_0, oppure che il punto x_0 è un punto di discontinuità per la funzione f.

Def: Una funzione $f : A \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ si dice **Lipschitziana** se esiste una costeante $L \geq 0$ tale che:

$$|f(x) - f(x_0)| \leq L|x - x_0| \quad per\ ogni\ x, y \in A \tag{3}$$

Teorema: Se f è lipschitziana allora è anche continua.

Calcolo dei limiti

Teorema: Sia $A \subset \mathbb{R}^n$ e $f, g : A \to \mathbb{R}^m$ mentre $h : A \to \mathbb{R}$ e considero x_0 punto di accumulazione per A. Si supponga che esistano finiti i seguenti limiti:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \qquad \lim_{x \to x_0} g(x) \quad e \quad \lim_{x \to x_0} h(x) \tag{4}$$

Allora esistono finiti anche i limiti per le funzioni $f \pm g$ e fh e se il limite per h è $\neq 0$ allora esiste anche il limite di $1/h$ e valgono le formule:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) \pm g(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \pm \lim_{x \to x_0} g(x) \tag{5}$$

$$\lim_{x \to x_0} f(x)h(x) = \lim_{x \to x_0} f(x) \lim_{x \to x_0} h(x) \tag{6}$$

$$\lim_{x \to x_0} \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{\lim_{x \to x_0} h(x)} \tag{7}$$