Tutorato di analisi 1

Alen Kushova

Collegio Volta

Introduzione

- Serie
- Serie Geometrica
- Criterio del confronto (anche asintotico)
- Criterio del rapporto e della radice
- Criterio della convergenza assoluta
- Serie esponenziale
- Criterio di Leibniz

Serie

Def: Sia $\{a_n\}$ una successione reale. Si consideri la successione $\{s_n\}$ che verifica:

$$s_0 = a_0 \quad e \quad s_{n+1} = s_n + a_{n+1} \;\; \forall\, n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

e si supponga che questa converga o diverga. Allora il limite della successione $\{s_n\}$ è detto *somma della serie della successione* $\{a_n\}$ e si scrive:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} s_n \tag{2}$$

Osservazione: possiamo esprimere $\{s_n\}$ come $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$

Serie Geometrica

Consideriamo la seguente serie:

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + ... \qquad con\ x \in \mathbb{R} \tag{3}$$

Questa viene detta **Serie Geometrica** e il suo fascino consiste in questo: se prendiamo x tale che $|x| < 1$ allora la successione delle ridotte è data dalla formula

$$s_n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x} \tag{4}$$

ed il bello è appunto che al limite vale

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \lim_{n \to \infty} s_n = \frac{1}{1 - x} \tag{5}$$

se invece $|x| \geq 1$ allora x^n non è infinitesima dunque la sua serie non converge.

Criterio del confronto (anche asintotico)

Osservazione Sia $\{a_n\}$ una successione reale con $a_n \geq 0$ per ogni n. Allora la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ non oscilla.

Criterio del confronto
Consideriamo le successioni reali $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ che soddisfano $0 \leq a_n \leq b_n$, allora se la serie $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ converge, converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$

Confronto asintotico
Siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni reali e strettamente positive tali che esiste finito e non nullo il limite:

$$\lim_{n \to \infty} \frac{a_n}{b_n} = l \tag{6}$$

Allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se e solo se converge $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$.

Criterio del rapporto e della radice

I seguenti due criteri sono molto simili sia nell'enunciato che nella conclusione e le dimostrazioni sono analoghe.

Criterio del Rapporto
Sia $\{a_n\}$ una successione reale a termini strettamente positivi tale che soddisfi:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = l \quad con\ l \in [0, +\infty] \quad e\ l \neq 1 \tag{7}$$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se $l < 1$ e diverge se $l > 1$.

Criterio della Radice
Sia $\{a_n\}$ una successione reale a termini positivi tale che soddisfi:

$$\lim_{n\to\infty} a_n^{1/n} = l \quad con\ l \in [0, +\infty] \quad e\ l \neq 1 \tag{8}$$

allora $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge se $l < 1$ e diverge se $l > 1$.

Criterio della convergenza assoluta

Il criterio è molto utile per le serie di vettori euclidei oppure di numeri complessi, tuttavia si riesce ad usare anche in caso reale.

Criterio della convergenza assoluta
Data la successione $\{a_n\}$ reale, oppure come sopra, se $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ converge, allora converge anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$.

Si dice quindi che la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge assolutamente quando converge la serie dei moduli, altrimenti si dice che converge semplicemente.

Esempio: se $\{a_n\}$ è una successione che verifica, per n abbastanza grande $|a_n| \leq \frac{c}{n^2}$, dove c è una costante, allora per il criterio del confronto la serie dei moduli della successione data converge e quindi per il criterio di convergenza assoluta anche la serie $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ converge.

Serie esponenziale

Questa è la serie che si scrive, con $z \in \mathbb{C}$ come:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{6} + \ldots \tag{9}$$

Se prendiamo la serie dei moduli questa si scrive come $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{|z|^n}{n!}$ allora applicando il criterio del rapporto abbiamo che:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1}/(n+1)!}{|z|^n/n!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|^{n+1} n!}{|z|^n (n+1)!} = \lim_{n\to\infty} \frac{|z|}{n+1} = 0 \tag{10}$$

Quindi questa converge la seguente uguaglianza, da cui trae il nome:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = e^z \quad \forall\ z \in \mathbb{C} \tag{11}$$

Criterio di Leibniz

Con quest'ultimo criterio analizziamo quelle che sono definite come serie a segni alterni, ovvero

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n a_n = S \tag{12}$$

Criterio di Leibniz
Sia $\{a_n\}$ una successione reale, monotona, infinitesima. Allora la serie sopra citata converge.
Inoltre, vale la disuguaglianza

$$|S - s_n| \leq |a_{n+1}| \quad \forall\ n \in \mathbb{N} \tag{13}$$