Tutorato di analisi 1

Alen Kushova

Collegio Volta

Introduzione

- Cardinalità di un insieme
- Confronto tra cardinalità
- Spazi metrici
- Dischi e intorni
- Aperti, chiusi, punti interni e di frontiera

Cardinalità

Per cardinalità di un insieme finito S si intende fondamentalmente il numero di elementi che questo insieme contiene. Questa si indica con il simbolo $c(S)$ oppure $\#(S)$ o ancora $|S|$.

Esempio: l'insieme $A = \{1, 3, 18\}$ ha cardinalità $c(A) = 3$ perché sono tre gli elementi che possiede.

Abbiamo però insiemi che non hanno cardinalità finita come $\mathbb{N}$ o $\mathbb{R}$. Il primo di questi ha cardinalità *infinita numerabile* mentre il secondo *non numerabile*.
Un importante strumento per mettere a confronto le cardinalità di due insiemi, sono le funzioni.

Cardinalità tra insiemi

Dati due insiemi X e Y possiamo dire che $c(X) = c(Y)$ se esiste una funzione $f : X \to Y$ biettiva. Se f è solo iniettiva allora $c(X) \leq c(Y)$. Se f è solo

Esempio: fissiamo $a > 0$ e prendiamo $A = \{ 1, 2, 3, 4, 5\}$ e sia $B = \{ a^1, a^2, a^3, a^4, a^5\}$ allora è ovvio che $c(A) = c(B)$ con l'applicazione $f : A \to B$ tale che $f(x) = a^x$. Infatti f è biettiva poiché la sua inversa è $g : B \to A$ tale che $g(y) = log_a(y)$

Anche $c(\mathbb{N}) = c(\mathbb{N} \setminus \{0\})$ come lo dimostriamo ?

Esercizio: dire se $c(\mathbb{R})$ è maggiore, minore o uguale a $c(\mathbb{R}^+)$ e darne una motivazione.

Spazi metrici

Def: dato uno spazio E si dice *distanza* su E una applicazione $d : E \times E \to \mathbb{R}$ che soddisfa $\forall\ a, b, c \in E$ le seguenti proprietà:

- $d(a, b) \geq 0$
- $d(a, b) = 0$ se e solo se a=b
- $d(a, b) = d(b, a)$
- $d(a, b) \leq d(a, c) + d(c, b)$

L'ultima si chiama **disuguaglianza triangolare**.

Def: Dato uno spazio E e una distanza d definita su E la coppia (E, d) viene detta *spaziometrico*

Esempio: su $\mathbb{R}$ la funzione $d(x, y) = |x - y|$ è una distanza. In generale su $\mathbb{R}^n$ la funzione diventa:

$$d(x, y) = \sqrt{x_1^2 + ... + x_n^2} \tag{1}$$

Dischi e intorni

Def: sia (E, d) spazio metrico, $\forall\ x \in X$ e $\forall\ r \in \mathbb{R}$ con $r > 0$ la palla di centro x e raggio r è:

$$B_r(x) = \{y \in E\ |d(x, y) < r\} \tag{2}$$

Def: Un intorno di x è un qualsiasi sottoinsieme $I \subset E$ per il quale $\exists\ r > 0$ tale che $B_r(x) \subset I$.

Def: Il punto x è di accumulazione per $A \subset E$ se ogni intorno di x contiene almeno un punto di $A \setminus \{x\}$

Def: dato $A \in E$ il punto $x \in A$ si dice isolato se esiste un intorno I di x per cui $I \cap A = \{x\}$

trovare un esempio per ogni definizione appena data.

Aperto, chiuso,interno e frontiera

Def: sia (E, d) uno spazio metrico e sia $A \subset E$ un suo sottoinsieme, diciamo che A è *aperto* se per ogni punto $x \in A$ esiste un intorno I_x interamente contenuto in A

Def: L'insieme $C \in E$ si dice *chiuso* se il suo complementare è aperto.

Osservazione: ci sono sottoinsieme che non sono nè aperti nè chiusi. Un esempio è l' intervallo $[a, b)$ con $a, b \in \mathbb{R}$.

Def: L'*interno* di un insieme A è il più grande aperto che vi è contenuto e si indica con A°. Quindi x è un *punto interno* ad A se esiste un suo intorno che è completamente contenuto in A. L'*esterno* di A è invece l'insieme dei *punti esterni* ovvero dei punti che hanno un intorno disgiunto da A. Infine la *frontiera* di A è l'insieme dei *punti di frontiera* ovvero tutti gli x che non sono né interni né esterni ad A.