Tutorato di analisi 1

Alen Kushova

Collegio Volta

Introduzione

- Numeri reali (definizione assiomatica)
- Intervalli
- *Sup* e *Inf* di $A \subset \mathbb{R}$
- Sottoinsiemi densi di $\mathbb{R}$
- Esercizi

Somma

Introduciamo i numeri reali secondo quelli che vengono detti assiomi di Peano.

L'insieme $\mathbb{R}$ è infatti dotato di una operazione interna, detta somma, $'+' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ tale che $(\mathbb{R}, +)$ sia un gruppo abeliano:

1. proprietà associativa;
2. elemento neutro;
3. esistenza dell'opposto;
4. propietà commutativa.

Moltiplicazione

Abbiamo anche una seconda operazione, che è la moltiplicazione, $'*' : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ che soddisfa:

1. proprietà associativa;
2. elemento neutro;
3. esistenza dell'inverso;
4. proprietà commutativa;
5. proprueta distributiva.

Assioma di completezza

- Abbiamo in $\mathbb{R}$ una relazione d'ordine totale $(\leq)$ con le seguenti proprietà:
  1. $\forall\ a, b, c$ se $a \leq b \implies a + c \leq b + c$
  2. $\forall\ a, b$ e $\forall c \geq 0$ se $a \leq b \implies a * c \leq b * c$
- L'assioma di completezza invece ci dice che: se A e B sono due sottoinsiemi di $\mathbb{R}$ non vuoti tali che $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$ vale $a \leq b$ allora esiste un elemtento $\xi \in \mathbb{R}$ tale che $a \leq \xi \leq b$ $\forall a \in A$ e $\forall b \in B$

Intervalli

Siano $a, b \in \mathbb{R}$ tali che valga la disuguaglianza $a \leq b$ allora definiamo i seguenti sottoinsiemi di $\mathbb{R}$

- $[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\}$
- $(a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\}$
- $[a, b) = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}$
- $(a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\}$

Questi si chiamano intervalli di $\mathbb{R}$ e vengono detti rispettivamente intervallo chiuso, aperto o semiaperto (entrambi gli ultimi due) di estremi a e b .

Sup e Inf

Sia A sottoinsieme non vuoto di $\mathbb{R}$ e siano $M, m \in \mathbb{R}$

Def. M è un *maggiorante* di A quando vale che $x \leq M \; \forall \; x \in A$, analogamente diciamo che m è un *minorante* di A quando vale appunto che $x \geq m \; \forall \; x \in A$

Def. M si dice *massimo di* A se M è un maggiorante e $M \in A$, invece m si dice *minimo di* A se m è un minorante e $m \in A$

Def. Diciamo che $S \in \mathbb{R}$ è l'*estremo superiorie* di A se S è un maggiorante e $S \leq M$ per ogni M maggiorante di A. Diciamo che $I \in \mathbb{R}$ è l'*estremo inferiore* di A se I è un minorante che verifica $I \geq m$ per ogni m minorante di A.

Insiemi limitati

Osserviamo che l'estremo superiore di A si indica con $\sup A$ mentre l'estremo inferiore di A si indica con $\inf A$.

Diciamo che un insieme A è *superiormente limitato* se esiste $M < +\infty$ che sia maggiorante di A.
Diciamo che un insieme A è *inferiormente limitato* se esiste $m > -\infty$ che sia minorante di A.

L'insieme A si dice *limitato* se è sia superiormente che inferiormente limitato.

Esempi: Nel caso in cui $a, b \in \mathbb{R}$ siano entrambi finiti abbiamo che gli intervalli di estremi a e b sono insiemi limitati.
L'insieme $\mathbb{Q}$ dei numeri razionali non è limitato (né superiormente né inferiormente).
L'insime $\mathbb{N}$ non è superiormente limitato ma un qualsiasi numero reale $a \leq 0$ è un minorante per $\mathbb{N}$

Insiemi densi

In topologia, se X è uno spazio topologico, $A \subset X$ è denso in X se la chiusura di A è tutto lo spazio X. Per noi lo spazio topologico in questione è la retta reale $\mathbb{R}$ allora abbiamo la seguente definizione, ma si può dimostrare che è uguale a quella appena data.

Def. Un sottoinsieme A di $\mathbb{R}$ è *denso* in $\mathbb{R}$ se $\forall\, x, y \in \mathbb{R}$, con $x < y$, esiste $a \in A$ tale che $x < a < y$.

Esempio: L'insieme $\mathbb{Q}$ è denso in $\mathbb{R}$. Trovare un altro esempio di insieme che sia denso in $\mathbb{R}$.