5a.Rotazione di un corpo rigido attorno ad un asse fisso

Un corpo rigido è un corpo indeformabile: le distanze relative tra i punti materiali che lo costituiscono rimangono costanti.
Il modello “corpo rigido” è utile in tutte quelle situazioni in cui la deformazione è trascurabile.

Posizione, velocità e accelerazione angolare

E' conveniente rappresentare la posizione di un punto P che percorre una traiettoria circolare di raggio *r* in termini di **coordinate polari** (r,θ). *r* è la distanza di P dall'origine mentre, θ è un angolo misurato in senso antiorario rispetto ad una retta di riferimento, la sua unità di misura è il **radiante** (rad). Mentre il punto P si muove lungo la circonferenza percorre un arco di lunghezza *s.*

Lunghezza arco di circonferenza:

$$s = r\theta$$

Spostamento angolare:

$$\Delta\theta = \theta_f - \theta_i$$

Velocità angolare media:

$$\omega_m = \frac{\Delta\theta}{\Delta t}$$

Velocità angolare:

$$\omega = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \frac{d\theta}{dt}$$

La velocità angolare è positiva se la rotazione avviene in senso antiorario,mentre è negativa se avviene in senso orario.

Accelerazione angolare media :

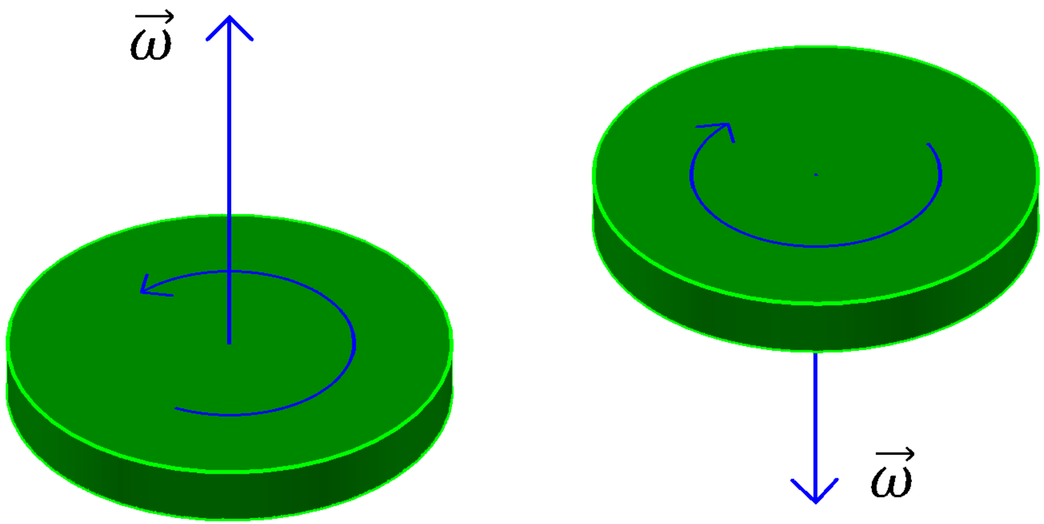
$$\alpha_m = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}$$

Accelerazione angolare:

$$\alpha = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\omega}{\Delta t} = \frac{d\omega}{dt}$$

Nel caso i rotazioni intorno ad un asse fisso, **tutti i punti materiali di un corpo rigido hanno la stessa velocità angolare e la stessa accelerazione angolare**.

Nel caso di rotazioni intorno ad un asse fisso, le direzioni dei vettori $\vec{\omega}$ ed $\vec{\alpha}$ coincidono con quella dell'asse di rotazione. Il verso di $\vec{\omega}$ è invece determinato attraverso la cosiddetta **regola della mano destra**.
Quando le quattro dita della mano destra avvolgono l'asse nella direzione di rotazione, il pollice indica il verso del vettore $\vec{\omega}$. $\vec{\alpha}$ è concorde con $\vec{\omega}$ quando la velocità aumenta, mentre è antiparallelo ad $\vec{\omega}$ in caso contrario.



Cinematica rotazionale

Se il moto rotatorio attorno ad un asse fisso di un corpo rigido avviene con accelerazione angolare costante, è possibile ricavare le seguenti equazioni:

Velocità angolare finale:

$$\omega_f = \omega_i + \alpha t \qquad \omega_f^2 = \omega_i^2 + 2\alpha(\theta_f - \theta_i)$$

Posizione angolare finale:

$$\theta_f = \theta_i + \omega_i t + \frac{1}{2}\alpha t^2 \qquad \theta_f = \theta_i + \frac{1}{2}(\omega_i + \omega_f)t$$

Relazione tra variabili angolari e lineari

Velocità tangenziale:

$$v = \frac{ds}{dt} = r\frac{d\theta}{dt} \rightarrow \quad v = r\omega$$

Accelerazione tangenziale:

$$a_t = \frac{dv}{dt} = r\frac{d\omega}{dt} \rightarrow \quad a_t = r\alpha$$

Accelerazione centripeta:

$$a_c = \frac{v^2}{r} = r\omega^2$$

Energia cinetica di rotazione

Nel caso di un corpo in rotazione attorno ad un asse fisso, l'energia cinetica associata al moto traslazionale è nulla, mentre non lo è quella associata al moto di rotazione.

Energia cinetica rotazionale:

$$K_R = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}mr^2\omega^2$$

E’ possibile riscrivere l’espressione precedente in funzione del **momento d’inerzia** associato ad una singola massa distante *r* dall’asse di rotazione.

Momento d’inerzia I:

$$I = mr^2 \quad \rightarrow \quad K_R = \frac{1}{2} I \omega^2$$

Teorema dell’energia cinetica per il moto rotatorio

Il lavoro fatto dalla risultante delle forze esterne su un corpo rigido che ruota intorno ad un asse fisso è uguale alla variazione dell’energia cinetica di rotazione del corpo.

$$W_{tot} = \frac{1}{2} I {\omega_f}^2 - \frac{1}{2} I {\omega_i}^2$$

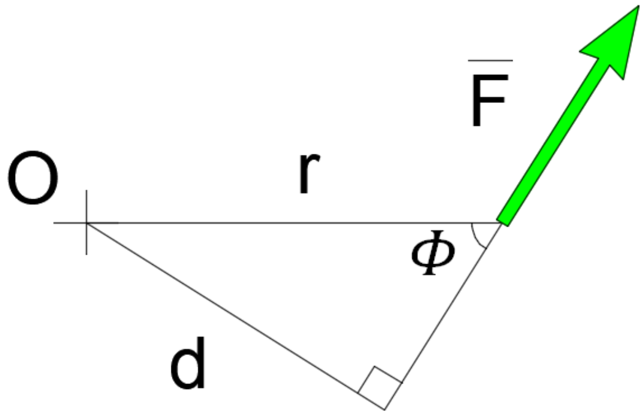
Momento di una forza

La capacità di una forza di porre in rotazione un corpo attorno ad un asse è misurata da una quantità chiamata **momento della forza applicata**.

$$M = Frsen\Phi = Fd$$

r è la distanza fra l'asse di rotazione ed il punto di applicazione della forza $\vec{F}$.

La quantità *d* viene chiamata **braccio** ed è la distanza fra l'asse di rotazione e la retta di azione della forza $\vec{F}$.



Momento e accelerazione angolare

Si consideri un punto materiale di massa *m* che si muove lungo una circonferenza di raggio *r* sotto l'azione di una forza tangenziale $\vec{F}_t$.
Dalla seconda legge di Newton:

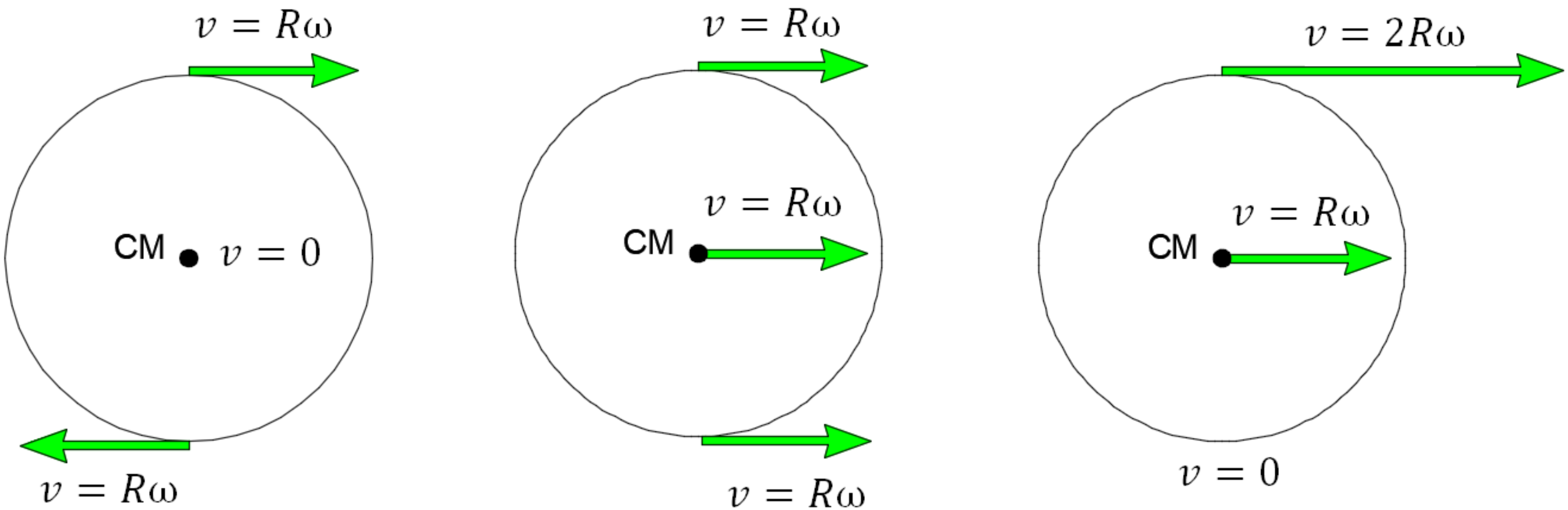
$$F_t = ma_t \;\rightarrow\; M = F_t r = ma_t r = mr^2\alpha$$

Ricordando che la definizione di momento d'inerzia

$$M = I\alpha$$

Rotolamento di un corpo rigido

Si consideri un sistema di riferimento solidale al suolo ed un corpo rigido che rotola su una superficie piana. La velocità di un punto del corpo è la somma delle velocità dovute al moto traslatorio e rotatorio.



Per avere rotolamento puro il punto di contatto tra corpo e superficie deve rimanere fermo ad ogni istante.
Se così non fosse ci sarebbe contemporaneamente strisciamento e rotolamento.

La forza che mantiene fermo il punto di contatto è la forza di attrito statico.

Energia cinetica totale di un corpo che rotola

L'energia cinetica totale di un corpo che rotola è la somma dell'energia cinetica associata al moto di rotazione attorno al centro di massa e di quella associata al moto di traslazione del centro di massa.

$$K = \frac{1}{2} I_{CM} \omega^2 + \frac{1}{2} M v_{CM}^2$$