12 | Esercizi di riepilogo III

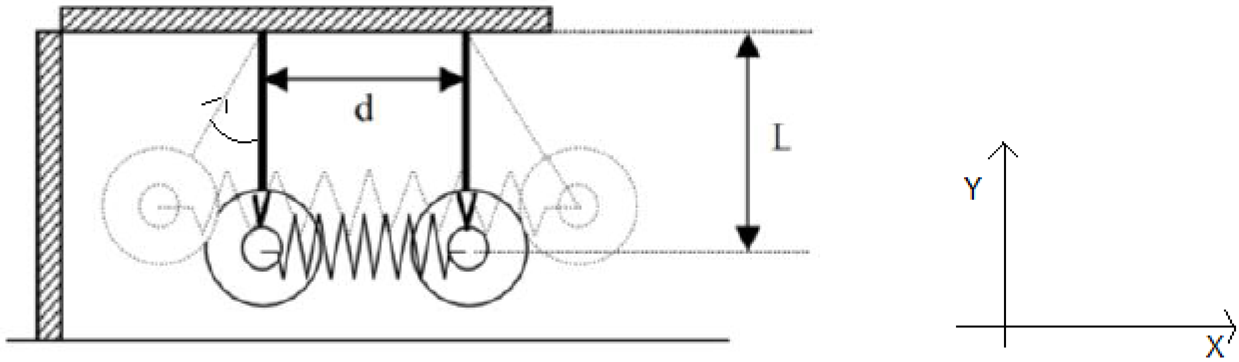

Figura 12.1

Esercizio B1 prova del 09/02/2017 Un atleta ha vinto due medaglie. Arrivato a casa le appende come in figura e, approfittando della loro forma a ciambella, le collega con una molla di costante elastica k e lunghezza di riposo d. (Considerare le medaglie punti materiali di massa m appese ad aste di lunghezza L e di massa trascurabile). Ad un certo istante le medaglie sono allontanate dalla posizione di equilibrio dello stesso angolo θ ma in verso opposto e poi sono lasciate andare.
a) determinare il valore della forza elastica F quando le medaglie sono spostate di un angolo θ.
b) determinare la reazione vincolare nel punto in cui l'asta è imperniata.
c) determinare il periodo di oscillazione del sistema quando a partire dalla posizione θ le masse vengono lasciate libere di muoversi

1. L'elongazione della molla rispetto all lunghezza di riposo d è $2L\sin(\theta)$ dunque in modulo

$$F_{el} = 2kL\sin(\theta) \tag{12.1}$$

2. La reazione vincolare per la singola medaglia è opposta alla proiezione sulla direzione dell'asta della risultante di forza elastica e forza peso

$$\begin{aligned} R &= (-mg\hat{\mathbf{y}} + 2kL\sin(\theta)\hat{\mathbf{x}}) \cdot \hat{\theta} && (12.2) \\ &= (-mg\hat{\mathbf{y}} + 2kL\sin(\theta)\hat{\mathbf{x}}) \cdot (\cos(\theta)\hat{\mathbf{y}} + \sin(\theta)\hat{\mathbf{x}}) && (12.3) \\ &= -mg\cos(\theta) + 2kL\sin^2(\theta) && (12.4) \end{aligned}$$

3. In approssimazione di piccole oscillazioni per la singola medaglia la forza di richiamo rispetto alla posizione di equilibrio si scrive

$$mL\frac{d^2\theta}{dt^2} = -(mg + 2kL)\sin(\theta) \simeq -(mg + 2kL)\theta \tag{12.5}$$

cui corrispondono un periodo

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{mg + 2kL}{mL}} \tag{12.6}$$

Esercizio B2 prova del 09/02/2017 Un cilindro termicamente isolato è munito di un pistone mobile senza attrito anch'esso termicamente isolante. Inizialmente il pistone è in posizione centrale e in ognuna delle due zone del cilindro (A e B) sono presenti n moli di gas perfetto monoatomico che sono alla stessa temperatura T_0 ed alla stessa pressione P_0. Mediante una resistenza percorsa da corrente il gas presente nella camera A viene riscaldato ed espandendosi comprime il gas contenuto nella camera B fino alla pressione $P_1 = kP_0$.
i) Si calcoli la temperatura finale del gas in B
ii) Si calcoli il lavoro compiuto sul gas in B
iii) Si calcoli la variazione di entropia del gas in B
iv) Si discuta la strategia per, calcolare la variazione di entropia del gas in A

1. Dato che il pistone è mobile la pressione nelle due camere è uguale. Indichiamo con V_A e V_B i volumi finali delle due camere essendo i volumi iniziali uguali e pari a V. Il vincolo è che $V_A + V_B = 2V$, inoltre la trasformazione (che assumiamo reversibile) del gas in B è adiabatica. Impostiamo dunque il seguente sistema di equazioni

$$\begin{cases} V_A + V_B = 2V \\ P_1 V_{A,B} = nRT_{A,B} \\ P_1 V_B^{\gamma} = P_0 V^{\gamma} = c \end{cases} \tag{12.7}$$

da cui, risolvendo per T_B

$$T_B = \frac{nR}{P_1}\left(\frac{c}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}} \tag{12.8}$$

2. non conoscendo l'andamento della pressione nella trasformazione non possiamo sperare di integrare la funzione $P(V)$. Sfruttiamo allora il fatto che la trasformazione del gas in B è adiabatica e che quindi $\Delta U = -W$ da cui otteniamo

$$W = -nc_v(T_B - T_0) = \frac{3nR}{2}(T_0 - \frac{nR}{P_1}\left(\frac{c}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}) \tag{12.9}$$

3. Essendo la trasformazione adiabatica $\Delta S_B = 0$

4. Del gas in A non conosciamo i dettagli della trasformazione ma conosciamo stato iniziale e finale, tanto quanto basta per calcolare ΔS_A. Usiamo la formula generale 8.20 per ottenere

$$\Delta S_A = nc_v \ln\left(\frac{P_1}{P_0}\right) + nc_p \ln\left(\frac{V_A}{V}\right) = nc_v \ln(k) + nc_p \ln\left(\left(\frac{c}{P_1}\right)^{\frac{1}{\gamma}}\frac{1}{V}\right) \tag{12.10}$$

Esercizio B3 prova del 09/02/2017 Si consideri un cono omogeneo di altezza H, raggio di base R e massa M. Si consideri come uniforme la densità del materiale che compone il cilindro.
a) Si calcoli e si indichi con un disegno dove si trova il centro di massa del cono
b) Si calcoli il momenti d'inerzia rispetto ad un asse coincidente con l'altezza del cono
c) Si calcoli il momento d'inerzia di un cilindro fatto dello stesso materiale e che abbia la stessa H ed M complessiva.
d) Si commenti il confronto tra i due risultati ottenuti ai punti b) e c)

1. Per simmetria il centro di massa si troverà sull'asse del cilindro. Posto $\rho = 1$ si ha
$$z_{CM} = \frac{\int_V z dV}{\pi \frac{R^2 H}{3}} \tag{12.11}$$
Integriamo prima sulla sezione circolare del cono perpendicolare all'asse e poi sulla coordinata z, di area $A = \pi \frac{R^2}{H^2}(H - Z)^2$.
$$\int_V z dV = \int_0^H dz \int_{A(z)} z dA = \int_0^H dz\ z\pi \frac{R^2}{H^2}(H - z)^2 = \pi \frac{R^2 H}{12}. \tag{12.12}$$
Sostituendo si ottiene
$$z_{CM} = \frac{H}{4} \tag{12.13}$$

2. Dobbiamo calcolare il momento di inerzia con la definizione integrale (ρ =densità= $\frac{3M}{\pi R^2 H}$, nella seguente equazione ρ rappresenta la coordinata radiale)
$$\frac{3M}{\pi R^2 H} \int dV(x^2 + y^2) = \frac{3M}{\pi R^2 H} \int_0^H dz \int_0^{r(z)} d\rho 2\pi\rho^3 = \frac{3}{10} M R^2 \tag{12.14}$$

3. L'analogo per il cilindro calcolo fornisce
$$\frac{M}{\pi R^2 H} \int dV(x^2 + y^2) = \frac{M}{\pi R^2 H} \int_0^H dz \int_0^R d\rho 2\pi\rho^3 = \frac{1}{2} M R^2 \tag{12.15}$$

4. per il cilindro ci aspettiamo un momento di inerzia maggiore poichè la stessa massa è disposta a distanza maggiore dall'asse di rotazione rispetto al cono.