11 | Esercizi di riepilogo II

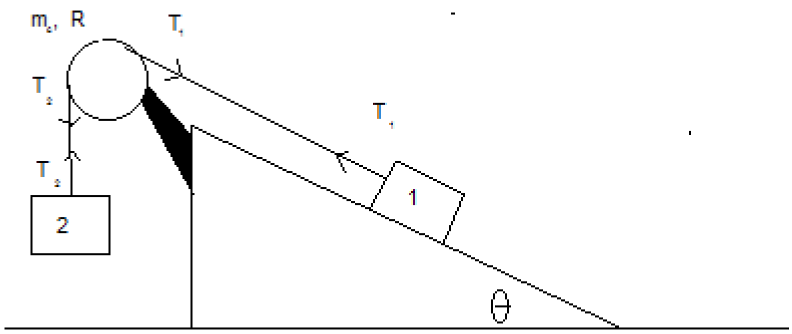

Figura 11.1

Esercizio B1 prova del 17/06/2016 Si consideri un piano inclinato di altezza h, angolo alla base θ, e sia μ il coefficiente di attrito presente lungo il piano. Sul piano è presente una massa m1 collegata ad una fune, la quale passa sopra una carrucola, di massa mc e raggio R, per collegarsi poi alla massa m2 sospesa in aria.
i) Si calcoli, se esiste, la condizione che deve valere per $\sin(\theta)$ affinchè m_1 si muova verso l'alto.
ii) Si calcoli, se esiste, la condizione che deve valere per $\sin(\theta)$ affinchè m_1 si muova verso il basso.
iii) Supponendo di essere nel caso del punto i), si scriva (senza risolverlo) il sistema di equazioni che permette di ricavare l'accelerazione del sistema.

Si fa riferimento al sistema in fig. 11.1. In condizioni di stazionarietà (assunto $\mu_s = \mu$ dato che non è meglio specificato dal problema) la carrucola è ferma e ho $T_1 = T_2 = m_2 g$. Perchè il corpo si muova la forza di trazione deve superare il limite statico cioè $|T_1 - m_1 g \sin(\theta)| = |m_2 g - m_1 g \sin(\theta)| > \mu m_1 g \cos(\theta)$.

1. Se m_1 sale allora devo considerare l'equazione

$$m_2 g - m_1 g \sin(\theta) > \mu m_1 g \cos(\theta) \tag{11.1}$$

   che elevata al quadrato fornisce la condizione

$$(1+\mu^2) m_1^2 \sin^2(\theta) - 2 m_1 m_2 \sin(\theta) > \mu^2 m_1^2 + m_2^2. \tag{11.2}$$

2. Nel caso "m_1 scende" devo considerare l'equazione

$$m_1 g \sin(\theta) - m_2 g > \mu m_1 g \cos(\theta) \tag{11.3}$$

   che sempre elevata al quadrato fornisce la medesima condizione del punto precedente per $\sin(\theta)$.

   Per concludere: la condizione su $\sin(\theta)$ da la condizione per cui il corpo si muove, a seconda che sia messa a sistema con la 11.1 o con la 11.3 si ha la condizione per cui si muove verso l'alto o verso il basso.

3. Dato che le direzioni del moto delle due massette non sono perpendicolari, scrivo le equazioni in componenti proiettando per m_1 nella direzione del piano inclinato e per m_2 nella direzione verticale. Constatando che con le corde tese si avrà $a_1 = a_2 = a$ si scrive

$$\begin{cases} T_1 - m_1 g \sin(\theta) \pm \mu m_1 g \cos(\theta) = m_1 a \\ (T_1 - T_2) R = I \frac{a}{R} \Rightarrow T_1 - T_2 = m_c \lambda \alpha \\ m_2 g - T_2 = m_2 a \end{cases} \tag{11.4}$$

   Dove $I = \lambda m_c R^2$, $\lambda \in \mathbb{R}$ e il segno della forza d'attrito nella prima equazione va scelto in base alla direzione del moto, cioè in base al segno di a. Nel caso richiesto va scelto il segno negativo.

Esercizio B2 prova del 17/06/2016 Si considerino tre recipienti di vetro (di volume V_1, V_2, V_3) comunicanti tra di loro attraverso tubi di volume trascurabile. Siano P_0 e T_0 la pressione e la temperatura iniziali del gas biatomico contenuto all'interno. Mentre il secondo cilindro viene mantenuto alla temperatura iniziale, il primo viene portato alla temperatura T_1 ed il terzo alla temperatura T_3.
i) si calcoli la variazione di energia interna in funzione dei dati forniti
ii) si calcoli la pressione finale del gas
iii) si calcoli la variazione di entropia del gas

1. Si risolve prima il secondo punto poiché è necessario conoscere la pressione finale del gas per risolvere il primo.
   Dato che i recipienti sono in comunicazione $P_1 = P_2 = P_3 = P$. Per $i = 1, 2, 3$ vale
   $$PV_i = n_i R T_i. \tag{11.5}$$
   Inoltre deve valere $n_1 + n_2 + n_3 = n$ cioè, sostituendo
   $$P \sum_{i=1}^{3} \frac{V_i}{RT_i} = \frac{P_0 V_0}{nRT_0} \tag{11.6}$$
   da cui si ricava immediatamente P.

2. Per ogni contenitore possiamo scrivere
   $$\Delta U_i = n_i c_v (T_i - T_0) \tag{11.7}$$
   sostituendo l'espressione di n_i e sommando i contributi abbiamo che
   $$\Delta U = \sum_{i=1}^{3} \frac{PV_i}{RT_i} c_v (T_i - T_0) \tag{11.8}$$
   dove P può essere espressa in funzione dei dati iniziali secondo l'espressione trovata nel punto precedente.

3. La variazione di entropia è la somma delle variazioni di entropia delle "tre porzioni di gas" n_1, n_2 ed n_3.
   $$\Delta S = \sum_{i=1}^{3} \int_{T_0}^{T_i} \frac{n_i c_v dT}{T} = \sum_{i=1}^{3} n_i c_v \ln\left(\frac{T_i}{T_0}\right) \tag{11.9}$$

Esercizio B3 prova del 17/06/2016 Una ruota dentata di massa M e raggio R (che si suppone essere piena) cade rotolando lunga una catena i cui due estremi sono uno attaccato al soffitto, e l'altro ad una massa m, anch'essa in caduta.
i) Si calcoli l'accelerazione della massa m e della massa M
ii) Si calcoli il rapporto tra le energie cinetiche delle due masse
iii) Si calcoli il tempo percorso dalla massa m ad abbassarsi di un tratto h, partendo da ferma.

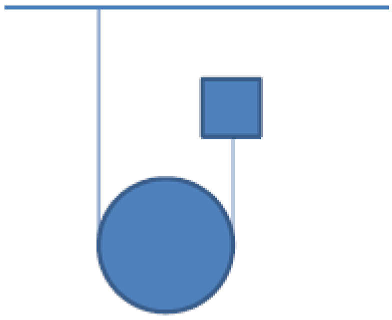

Figura 11.2

1. Per calcolare le accelerazioni scriviamo le equazioni che governano il sistema, per le accelerazioni e per i momenti

$$\begin{cases} T_1 + m_1 g = m_1 a \\ Mg - T_1 - T_2 = M\frac{a}{2} \\ (T_2 - T_1)R = I\frac{a}{2R} \end{cases} \tag{11.10}$$

   Dove si è posto $a_M = \frac{1}{2}a_m = \frac{1}{2}a$ per un ragionamento analogo a quello descitto nel problema a pagina 62. Dato che $I = \frac{1}{2}MR^2$ si ottiene

$$a = \frac{2m + M}{\frac{3}{4}M + 2m}g \tag{11.11}$$

2. Le velocità traslazionali dei due corpi rispettano la condizione $v_M = \frac{1}{2}v_m$ dunque per le energie cinetiche traslazionali varrà

$$\frac{E_{trasl,M}}{E_m} = \frac{M}{4m}$$

. Includendo anche il contributo rotazionale si ottiene

$$\frac{E_M}{E_m} = \frac{\frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}MR^2\right)\left(\frac{v}{2R}\right)^2 + \frac{1}{2}M\frac{v^2}{4}}{\frac{1}{2}mv^2} = \frac{3}{8}\frac{M}{m} \tag{11.12}$$

3. Il moto è semplicemente un moto uniformemente accelerato dunque

$$h = \frac{1}{2}at^2 \to t = \sqrt{\frac{2h}{g}\frac{\frac{3}{4}M + 2m}{2m + M}} \tag{11.13}$$

Esercizio B3 prova del 29/08/2016 All'interno di una cisterna di sezione S ed altezza H si sa che il liquido (di densità rho) arriva solo fino ad una certa altezza h. La parte sovrastante il liquido è invece occupata da un gas a pressione P_{int}. Ad una altezza d dal fondo si trova un rubinetto per lo svuotamento della cisterna.
i) Quanto vale la velocità iniziale di fuoriuscita del liquido dal rubinetto?
ii) Se, assieme al rubinetto, viene aperto anche un foro sulla cima della cisterna, come varia nel tempo la velocità di uscita del liquido?

1. Applichiamo il teorema di Bernoulli a una linea di flusso che va dal pelo libero del fluido al rubinetto. Otteniamo

   $$P_{int} + \rho g h = P_{atm} + \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g d, \tag{11.14}$$

   da cui immediatamente

   $$v = \sqrt{\frac{2}{\rho}(\Delta P + \rho g d)} \tag{11.15}$$

   dove $\Delta P = P_{int} - P_{atm}$.

2. Se si apre un foro allora $P_{int} = P_{atm}$. Applicando sempre il teorema di Bernoulli otteniamo

   $$\rho g h = \frac{1}{2}\rho v^2 + \rho g d \tag{11.16}$$

   da cui

   $$v = \sqrt{2g(h(t) - d)}. \tag{11.17}$$

   Se il cilindro si svuota avremo $h = h(t) = \frac{V(t)}{S}$. La variazione del volume è dato dal flusso uscente, in formule

   $$\frac{dV(t)}{dt} = -vA \tag{11.18}$$

con A (non fornito come dato dal problema) diametro del foro alla base. Avremo dunque che

$$\frac{d(h(t)-d)}{dt} = \frac{dh(t)}{dt} = \frac{1}{S}\frac{dV(t)}{dt} = -\frac{A}{S}\sqrt{2g}\sqrt{h(t)-d} \tag{11.19}$$

che è un'equazione differenziale a variabili separabili

$$y' = -cy^{1/2} \rightarrow \frac{y'}{y^{1/2}} = -c \tag{11.20}$$

che integrata conduce a

$$h(t) = (-\frac{A\sqrt{2g}}{2S}t + h_0)^2. \tag{11.21}$$