Lezione 10

Teorema spettrale

Il teorema spettrale che enunceremo tra poco vale sia per i reali che per i complessi. Per arrivare alla sua formulazione dobbiamo richiamare il prodotto scalare che è stato definito in 2.3, ma per i complessi si ha una richiesta differente dalla bilinearità, ovvero la sesquilinearità, cioè

$$b(\lambda\mathbf{v}_1 + \mu\mathbf{v}_2, w) = \bar{\lambda}b(\mathbf{v}_1, \mathbf{w}) + \bar{\mu}b(\mathbf{v}_2, w) \tag{10.1}$$

ovvero l'antilinearità a sinistra (la linearità a destra resta). Questo prodotto scalare si dice hermitiano. Da ora per semplicità di notazioni useremo solo le parentesi per indicare il prodotto scalare.

Teorema 10.1. *Sia $f : V \to W$ applicazione lineare con V, W spazi vettoriali. Allora $\exists!$ f^* applicazione lineare tale che*

$$(f(\mathbf{v}), \mathbf{w}) = (\mathbf{v}, f^*(\mathbf{w})) \tag{10.2}$$

f^* è detto aggiunto di f e se a f è associata la matrice A, allora a f^* è associata la matrice $\bar{A}^t$.

Definizione 10.2. *$f : V \to W$ è normale se $f \circ f^* = f^* \circ f$, autoaggiunto se $f = f^*$, antiautoaggiunto se $f = -f^*$, unitario se $f \circ f^* = \mathbb{I}$.*

Tutte queste definizioni hanno il loro analogo matriciale, basterà mettere la matrice trasposta coniugata al posto dell'aggiunto. Finalmente passiamo al

Teorema 10.3 (Spettrale). *f è normale $\iff$ ammette una base unitaria di autovettori (ovvero autovettori tali che $(\mathbf{v}_i, \mathbf{v}_j) = \delta_{ij}$). Equivalentemente, ogni matrice hermitiana può essere diagonalizzata con matrici unitarie (ovvero tali che $U\bar{U}^t = \mathbb{I}$).*

Ricordiamo che la delta di Kronecker δ_{ij} è definita come

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ se } i = j \\ 0 \text{ se } i \neq j \end{cases} \tag{10.3}$$

Notiamo che, limitandoci al caso reale, il teorema spettrale afferma che le matrici simmetriche sono diagonalizzabili con matrici ortogonali. Ciò ha una grande importanza anche in fisica, infatti nello spazio euclideo le matrici ortogonali rappresentano le rotazioni, e diagonalizzare una matrice si traduce nel poter trovare un sistema di riferimento ottenuto tramite rotazioni (le matrici ortogonali) in cui la matrice assume la decisamente più semplice forma diagonale.

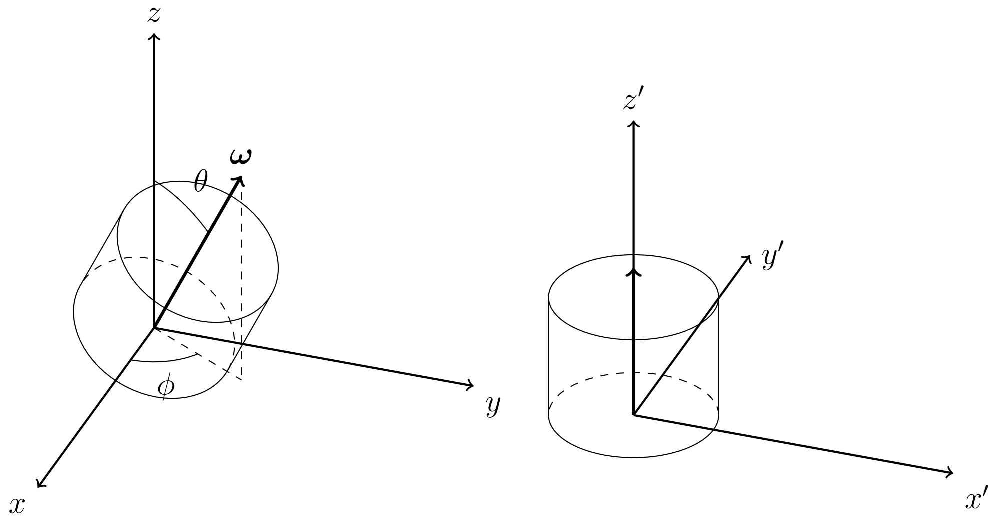

Figura 10.1: rappresentazione della diagonalizzazione del tensore di inerzia, con $\boldsymbol{\omega}$ si è indicato il vettore velocità angolare. Nel secondo sistema di riferimento (x', y', z') il tensore di inerzia risulta diagonalizzato tramite una rotazione degli assi (ruotati in modo da far corrispondere la direzione di $\boldsymbol{\omega}$ con la direzione di z').

Esempio 10.4. Il tensore di inerzia è la matrice

$$I = \begin{pmatrix} I_{xx} & I_{xy} & I_{xz} \\ I_{yx} & I_{yy} & I_{zz} \\ I_{zx} & I_{zy} & I_{zz} \end{pmatrix} \tag{10.4}$$

tale che $\mathbf{L} = I\boldsymbol{\omega}$. Essa è una matrice simmetrica e in quanto tale può essere diagonalizzata, ovvero esiste un sistema di riferimento ottenibile tramite rotazione degli assi in cui essa assume la forma

$$I = \begin{pmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 & 0 \\ 0 & 0 & I_3 \end{pmatrix} \tag{10.5}$$