10 | Esercizi di riepilogo I

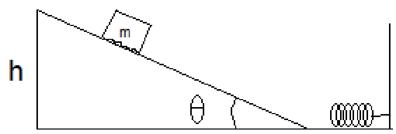

Figura 10.1

Esercizio B1 prova del 17/06/2016

1. Nel sistema rappresentato in fig. 10.1 è presente attrito, dunque forze non conservative. Sappiamo che

$$E_{mecc,f} - E_{mecc,i} = L_{NC} \tag{10.1}$$

Dove $L_{NC} = -\mu mg\cos(\theta) \cdot \frac{h}{\sin(\theta)}$. Sostituendo si ottiene

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - \mu mgh\frac{h}{\tan(\theta)} \tag{10.2}$$

da cui

$$v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan(\theta)}\right)} \tag{10.3}$$

C'è da notare che la condizione che l'argomento della radice sia positivo equivale alla condizione che l'angolo θ sia maggiore dell'angolo limite (assunto $\mu_s = \mu$) e dunque che il corpo effettivamente scivoli.

2. Lo stato finale in cui la molla è completamente compressa corrisponde allo stato i cui l'energia cinetica del corpo è stata completamente trasferita in energia potenziale elastica. Il processo è adesso conservativo e ponendo

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{10.4}$$

si ricava

$$\Delta x = \sqrt{\frac{2gh}{k}\left(1 - \frac{\mu}{\tan(\theta)}\right)} \tag{10.5}$$

3. Bisogna sempre applicare la 10.1 considerando come stato iniziale quello con la molla massimamente copressa e come stato finale quello in cui il peso è risalito fino alla quota h_1. Abbiamo

$$mgh_1 = \frac{1}{2}k\Delta x^2 - \frac{mg\mu h_1}{\tan(\theta)} = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{mg\mu h_1}{\tan(\theta)} \tag{10.6}$$

che sostituendoci 10.2 fornisce

$$h_1 = h\frac{1 - \frac{\mu}{\tan(\theta)}}{1 + \frac{\mu}{\tan(\theta)}} \tag{10.7}$$

4. Ripetendo il ragionamento per un cilindroide con momento di inerzia dato da $I = M(aR)^2$ l'equazione 10.2 si scrive

$$\frac{1}{2}I\omega^2 + \frac{1}{2}mv^2 + mgR = mg(h + R) \tag{10.8}$$

Dove, essendo il moto di puro rotolamento quindi il punto di contatto istantaneamente fermo $L_{NC} = 0$. Dato che per il vincolo di puro rotolamento $\omega = v/R$ risolvendo per v si ottiene

$$v = \sqrt{\frac{2gh}{a + 1}} \tag{10.9}$$

che per $a \to 0$ tende giustamente al valore limite di un corpo puntiforme che scivola senza attrito.

Esercizio B2 prova del 17/06/2016

1. Il calore sottratto alla massa m è $Q_m = cm(T_L - T_1)$. A partire dalla definizione di COP di una macchina frigorifera

$$COP = \frac{Q_L}{W} \tag{10.10}$$

leghiamo il calore assorbito dalla sorgente fredda al lavoro necessario. Essendo la macchina frigorifera una macchina di Carnot quindi che $\frac{|Q_H|}{|Q_L|} = \frac{T_H}{T_L}$ si scrive

$$COP = \frac{T_L}{T_H - T_L} \tag{10.11}$$

Poniamo $Q_m = \lambda Q_L$ con $\lambda \in \mathbb{R}$. Il lavoro $W_e = \lambda W$ necessario perché Q_m sia trasferito alla sorgente alla temperatura T_H dalla definizione di COP risulta

$$W_e = \frac{Q_m}{COP} = c(T_1 - T_L)\left(\frac{T_H}{T_L} - 1\right) \tag{10.12}$$

2. Separiamo i contributi alla differenza di entropia come

$$\Delta S = \Delta S_{macchina} + \Delta S_m + \Delta S_{sorgenti}. \tag{10.13}$$

Possiamo subito dire che $\Delta S_{macchina} = 0$ se la macchina compie cicli completi.

La differenza di entropia della massa m si calcola come

$$\Delta S_m = \int_{T_1}^{T_L} \frac{dQ}{T} = \int_{T_1}^{T_L} \frac{cmdT}{T} = cm \ln\left(\frac{T_L}{T_1}\right) \tag{10.14}$$

La sorgente a T_L non varia la sua entropia perché assorbe dalla massa e cede al gas la stessa quantità di calore a temperatura costante. Diverso è il discorso per la sorgente a T_H la quale assorbe la quantità netta di calore $Q_H = Q_m + |W| = cm(T_1 - T_L)\frac{T_H}{T_L}$ a temperatura T_H corrispondente a un

$$\Delta S_{sorgenti} = \frac{|Q_H|}{T_H}. \tag{10.15}$$

Valutiamo il bilancio totale, sostituendo otteniamo

$$\Delta S = mc\left(\frac{T_1}{T_L} - \ln\left(\frac{T_1}{T_L}\right) - 1\right) \tag{10.16}$$

studiando la funzione $f(x) = x - \ln(x) - 1$ vediamo che $f(x) \geq 0 \forall\, x \geq 1$ e $f(x) = 0 \iff x = 1$ in accordo con il fatto che il trasferimento di calore dalla massa alla sorgente fredda non è reversibile perché non avviene all'equilibrio termico fra le due.

3. In regime stazionario, se la temperatura dell'ambiente esterno è quella della sorgente calda T_H, attraverso le pareti fluisce la quantità di calore[1]

$$Q = k\frac{T_H - T_L}{d}6L^3 t. \tag{10.17}$$

La potenza necessaria solo per raffreddare la cella è data da

$$\frac{dW_e}{dt} = COP^{-1}\frac{dQ}{dt} = k\frac{6L^3(T_H - T_L)^2}{T_L d} \tag{10.18}$$

Esercizio B3 prova del 17/06/2016 L'esercizio è svolto a pagina 41

[1] vedi par. 10.9 del Mazzoldi