

Lezione 9

Applicazioni bilineari, congruenza, calcolo della segnatura

Definizione 9.1. Sia V spazio vettoriale, si chiama applicazione bilineare una applicazione

$$b : V \times V \rightarrow \mathbb{R} \quad (9.1)$$

che sia bilineare. In più l'applicazione si dice:

1. simmetrica se $b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = b(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;
2. antisimmetrica se $b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = -b(\mathbf{w}, \mathbf{v}) \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V$;

Esattamente come le applicazioni lineari, anche le applicazioni bilineari possono essere rappresentate tramite una matrice, infatti si ha il seguente

Teorema 9.2. La matrice A associata ad una applicazione bilineare, ovvero la matrice per cui si ha che, fissata una base $\{\mathbf{e}_i\}$,

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \mathbf{v}^t A \mathbf{w} \quad \forall \mathbf{v}, \mathbf{w} \in V \quad (9.2)$$

è la matrice i cui elementi sono dati da $a_{ij} = b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j)$.

Dimostrazione. Assumendo la dimensione dello spazio essere n , sviluppiamo i vettori \mathbf{v}, \mathbf{w} rispetto alla base $\{\mathbf{e}_i\}$, $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n c_i \mathbf{e}_i$, $\mathbf{w} = \sum_{j=1}^n d_j \mathbf{e}_j$; allora per bilinearità

$$b(\mathbf{v}, \mathbf{w}) = \sum_{i,j} c_i d_j b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (9.3)$$

Quindi se A è costruita come da enunciato, si ha

$$\mathbf{v}^t A \mathbf{w} = (c_1 \quad c_2 \quad \dots \quad c_n) \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} d_1 \\ d_2 \\ \vdots \\ d_n \end{pmatrix} \quad (9.4)$$

che sviluppato corrisponderà a

$$\mathbf{v}^t A \mathbf{w} = \sum_{i,j} c_i a_{ij} d_j = \sum_{i,j} c_i d_j b(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \quad (9.5)$$

per come abbiamo costruito gli a_{ij} . \square

Esattamente come per le matrici associate ad applicazioni lineari è associato il concetto di similitudine, così per le matrici associate ad applicazioni bilineari è associato il concetto di congruenza.

Definizione 9.3. *Due matrici A, B si dicono congruenti se $\exists M$ invertibile tale che $M^t A M = B$*

Notiamo esplicitamente che nel caso di matrici ortogonali, ovvero matrici tali che $C^t = C^{-1}$, i concetti di congruenza e similitudine coincidono

Teorema 9.4. *Due matrici congruenti rappresentano la stessa applicazione bilineare in due basi diverse.*

Dimostrazione. Siano A, B due matrici congruenti tramite la M , dimostreremo che M è la matrice del cambiamento base. Infatti (indicheremo con i primati i vettori dell'altra base e M la relativa matrice di cambiamento base)

$$\mathbf{v}^t A \mathbf{w} = (M \mathbf{v}')^t A (M \mathbf{w}') = \mathbf{v}'^t M^t A M \mathbf{w}' = \mathbf{v}'^t B \mathbf{w}'. \quad (9.6)$$

\square

Ci si pone allora anche per le applicazioni bilineari il problema della diagonalizzazione, si hanno i seguenti teoremi (che non dimostriamo)

Teorema 9.5 (Di Lagrange). *Ogni matrice simmetrica è congruente ad una matrice diagonale.*

Teorema 9.6 (Di Sylvester). *Data una applicazione bilineare simmetrica in uno spazio vettoriale di dimensione $n \geq 1$, esiste una base in cui la matrice associata assume la forma*

$$\begin{pmatrix} \mathbb{I}_p & 0 & 0 \\ 0 & -\mathbb{I}_{r-p} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.7)$$

Dove, posto $q = r - p$ con r rango della matrice, la coppia (p, q) si chiama segnatura della matrice associata alla applicazione bilineare simmetrica.

Alcuni esercizi d'esame potranno riguardare il calcolo della segnatura, per calcolarla, visto che trovare "a mano" la base che rende la matrice associata all'applicazione bilineare nella forma (9.7) può essere proibitivo, si può sfruttare il seguente criterio. Si calcolano i *sottodeterminanti principali* (quelli ottenuti eliminando un certo numero di righe e colonne corrispondenti dalla matrice) di ordine crescente a partire dal determinante di ordine uno; facendo partire p, q da zero, se il primo determinante (che corrisponderà ad un numero) è positivo, si incrementa p , se è

negativo si incrementa n , poi andando avanti ad ogni cambio di segno si incrementa q e ad ogni permanenza del segno si incrementa p . Questo procedimento alla fine consegnerà la segnatura della matrice in questione.

Attenzione: il criterio funziona se le matrici di ordine superiore su cui si fanno i determinanti contengono quelle precedenti e se non si incappa in determinanti nulli. Quindi se si conosce il rango r della matrice, si dovranno trovare le sottomatrici con determinante non nullo fino all' r -esimo ordine, con quelle di ordine superiore che contengono quelle di ordine inferiore. Come appena detto può succedere che comunque si scelgano i minori principali incapsulati uno di questi sia nullo, ad esempio in

$$Q = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (9.8)$$

La matrice in questione ha ovviamente rango massimo e autovalori

$$\lambda = \begin{cases} 1 & m_g = 2 \\ -1 & m_g = 1 \end{cases}, \quad (9.9)$$

ma facciamo per un attimo finta di non saperlo perchè questo è un esempio illustrativo per quello che sto per dire, facciamo finta sia una matrice complicatissima che soffre dell'inconveniente che abbiamo appena detto. Per procedere al calcolo della segnatura dobbiamo cercare una nuova base in cui il determinante dei minori non sia nullo. Si procede per tentativi cercando di sostituire l'elemento della base corrispondente al minore che da problemi in questo caso indifferentemente il secondo o il terzo. possiamo ad esempio effettuare il seguente cambiamento di base,

$$\begin{cases} \mathbf{e}'_1 = \mathbf{e}_1 \\ \mathbf{e}'_2 = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \\ \mathbf{e}'_3 = \mathbf{e}_3 \end{cases} \quad (9.10)$$

rappresentato dalla matrice

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (9.11)$$

Operando la stasformazione di congruenza corrispondente al cambio di base si ottiene

$$Q' = M^t Q M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \quad (9.12)$$

per cui i determinanti dei minori incapsulati valgono ad esempio

$$|1| = 1, \quad \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 2, \quad |Q'| = -1 \quad (9.13)$$

ottenendo una permanenza e una variazione quindi una segnatura $(2,1)$ che è quella che avevamo ricavato dall'ispezione diretta degli autovalori.

Esercizio 9.7. Si calcoli la segnatura di

$$\begin{pmatrix} 5 & 3 & -2 \\ 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Soluzione: partiamo da in alto a sinistra, il primo determinante corrisponde al numero 5 che è positivo, per ora $p = 1$, $q = 0$; il secondo determinante di ordine superiore è

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -9$$

negativo, c'è cambio segno, quindi aumentiamo $q = 1$ e lasciamo invariato $p = 1$. Infine il determinante di tutta la matrice è -8 , c'è permanenza segno, quindi aumentiamo $p = 2$ e lasciamo invariato $q = 1$. La segnatura è $(2, 1)$.