9 | Cicli e macchine termiche

Esercizio B2 prova del 20/09/2016

1. Per una macchina di Carnot il rendimento vale
$$\lambda = 1 - \frac{T_L}{T_H} = 1 - \frac{|Q_L|}{Q_H} = \frac{L}{Q_H} \tag{9.1}$$
Con la convenzione che i calori scambiati con la sorgente calda $Q_H > 0$ e quelli con la sorgente fredda $Q_L < 0$. Per una macchina frigorifera il COP è dato da
$$\eta = \frac{|Q_L|}{|L|} \tag{9.2}$$
e dunque il rendimento si può anche esprimere come
$$\lambda = \frac{T_L}{\eta T_H} \tag{9.3}$$

2. Detta C il calore specifico dell'acqua abbiamo che il frigorifero deve sottrarre una quantità di calore pari a $|Q_L| = CMT_0$ da cui si ottiene una potenza
$$P = \frac{|L|}{\Delta t} = \frac{Q_L}{\eta \Delta t} = \frac{CMT_0}{\eta \Delta t} \tag{9.4}$$

3. $Q_H = L + |Q_L| = |Q_L|(1 + \eta^{-1}) = CMT_0(1 + \eta^{-1})$

4. La variazione di entropia complessiva di tutto il sistema è data dal contributo di 4 termini che tengono conto di tutti gli scambi di calore all'interno del sistema $\Delta S = \Delta S_{acqua} + \Delta S_L + \Delta S_{macchina} + \Delta S_H$. Esaminiamo i termini uno alla volta. Quando la temperatura varia di dT l'acqua scambia una quantità di calore $dQ = CMdT$ con la sorgente fredda, dunque l'entropia si calcola
$$\Delta S_{acqua} = \int_{T_i}^{T_f} \frac{CMdT}{T} = CM \ln\left(\frac{T_f}{T_i}\right) < 0 \tag{9.5}$$

dove naturalmente le temperature sono espresse in gradi kelvin.

La variazione di entropia della sorgente fredda ΔS_L è nel complesso nulla poiché essa assorbe dall'acqua e rilascia alla macchina la stessa quantità di calore alla stessa temperatura. Anche $\Delta S_{macchina}$ è nulla alla fine dei cicli perché l'entropia è una funzione di stato. La sorgente calda assorbe a temperatura costante T_H, quindi

$$\Delta S_H = \frac{Q_H}{T_H} = \frac{L}{\lambda T_H} = \frac{Q_L}{\eta\lambda T_H} = \frac{CMT_0}{\eta\lambda T_H} \tag{9.6}$$

Esercizio 12.51 Si spera che il problema non sia riuscito a buttare fumo negli occhi, infatti deve essere noto, quasi per definizione, che una macchina reversibile non aumenta l'entropia dell'universo. Questo si vede immediatamente dato che sussiste la relazione

$$\frac{Q_1}{Q_2} = -\frac{T_1}{T_2} \Rightarrow \oint \frac{\delta Q}{T} = \frac{Q_1}{T_1} + \frac{Q_2}{T_2} = 0 \tag{9.7}$$

Il lavoro prodotto dalla prima macchina è

$$W = \eta_{rev} Q_2 = 1kJ \tag{9.8}$$

Per la seconda macchina con $\eta = \eta_{irr}$ la quantità di calore assorbito è $Q'_2 = W/\eta_{irr} = 3.33kJ$ di conseguenza il calore ceduto è $Q'_1 = W - Q'_2 = -2.33kJ$. Facilmente si calcola la variazione di entropia dell'universo, quella delle sorgenti (da cui il segno meno)

$$\Delta S_u = -\frac{Q'_1}{T_1} - \frac{Q'_2}{T_2} = 2.22JK^{-1} \tag{9.9}$$

Esercizio 12.38 La prima trasformazione che compie il ciclo è irreversibile dunque quanto possiamo dire sul sistema deve sfruttarne le funzioni di stato dei soli stati di equilibrio iniziali e finali. L'espansione del gas avviene a pressione (esterna) costante[1] dunque possiamo calcolare il lavoro compiuto in dal gas

$$W_{1,2} = P_2(V_2 - V_1) = 1.31kJ = -nc_v(T_2 - T_1) \tag{9.10}$$

Dato che $T_2 = P_2V_2/nR = 304.7K$ dalla 9.10 si ricava $T_1 = 368K$. Per la trasformazione isoterma vale

$$Q_{2,3} = -6.28kJ = W = \int_{V_f}^{V_i} PdV = \int_{V_2}^{V_3} \frac{nRT_2}{V} dV = nRT_2 \ln\frac{V_3}{V_2} \tag{9.11}$$

[1] il fatto che sia irreversibile significa che il gas non passa per stati di equilibrio nella trasformazione, come ad esempio avviene in una espansione repentina

che da $V_3 = 2.09 \cdot 10^{-3} m^{-3}$.

Vogliamo adesso calcolare $Q3, 1$, e per farlo facciamo un bilancio degli scambi energetici nel ciclo.

$$W_{1,2} + W_{2,3} + W_{3,1} = Q_{1,2} + Q_{2,3} + Q_{3,1} \tag{9.12}$$

Questa espressione si semplifica considerato che $Q_{1,2} = 0$ e che $Q_{2,3} = W_{2,3}$ lungo l'isoterma, da cui $Q_{3,1} = W_{1,2} + W_{3,1}$. Dato che l'energia interna è una funzione di stato

$$U_{ciclo} = \Delta U_{1,2} + \Delta U_{2,3} + \Delta U_{3,1} = \Delta U_{1,2} + \Delta U_{3,1} = 0 \tag{9.13}$$

Inoltre si ha $-\Delta U_{1,2} = W_{1,2}$ dalla 9.10. Mettendo tutto assieme si ricava $Q_{3,1} = 7.82 kJ$. La variazione di entropia dell'universo è nonnulla solo lungo la trasformazione irreversibile $1 \to 2$. Usando una qualsiasi formula per la differenza di entropia si calcola ad esempio

$$\Delta S_u = \Delta S_{1,2} = nR \ln \frac{V_2}{V_1} + nc_V \ln \frac{T_2}{T_1} = 2.17 J/K. \tag{9.14}$$

10 | Esercizi di riepilogo I

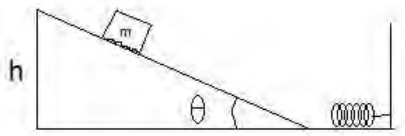

Figura 10.1

Esercizio B1 prova del 17/06/2016

1. Nel sistema rappresentato in fig. 10.1 è presente attrito, dunque forze non conservative. Sappiamo che

$$E_{mecc,f} - E_{mecc,i} = L_{NC} \tag{10.1}$$

Dove $L_{NC} = -\mu mg\cos(\theta) \cdot \frac{h}{\sin(\theta)}$. Sostituendo si ottiene

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh - \mu mgh\frac{h}{\tan(\theta)} \tag{10.2}$$

da cui

$$v = \sqrt{2gh\left(1 - \frac{\mu}{\tan(\theta)}\right)} \tag{10.3}$$

C'è da notare che la condizione che l'argomento della radice sia positivo equivale alla condizione che l'angolo θ sia maggiore dell'angolo limite (assunto $\mu_s = \mu$) e dunque che il corpo effettivamente scivoli.

2. Lo stato finale in cui la molla è completamente compressa corrisponde allo stato i cui l'energia cinetica del corpo è stata completamente trasferita in energia potenziale elastica. Il processo è adesso conservativo e ponendo

$$\frac{1}{2}k\Delta x^2 = \frac{1}{2}mv^2 \tag{10.4}$$