Lezione 7

Il metodo di eliminazione di Gauss

Il metodo di eliminazione di Gauss è un metodo per risolvere i sistemi lineari. Si basa sull'uso di operazioni (dette elementari) che non cambiano le soluzioni del sistema ma che possono ridurlo in una forma "a scaletta". Questo metodo permette anche di stabilire se un sistema sia risolubile o meno e la dimensione dello spazio delle soluzioni. Se ne può capire la versatilità anche nel campo matriciale ricordando che un sistema può essere visto come un'equazione matriciale del tipo

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{7.1}$$

dove, al solito, A indica la matrice dei coefficienti, $\mathbf{b}$ il "vettore" termini noti e $\mathbf{x}$ il "vettore" incognite. In particolare se le operazioni elementari su un sistema non cambiano le soluzioni del sistema stesso, allora anche le loro analoghe sulle matrici non ne cambiano il rango in quanto collegato alle soluzioni del sistema (ricordiamo che il rango di una matrice si traduce come la dimensione dello spazio delle soluzioni del sistema associato, ammesso sia risolubile). In particolare sarà conveniente ridurre la matrice di partenza ad una matrice a scala con rango invariato proprio per calcolare quest'ultimo con il metodo dei determinanti discuso nelle lezioni precedenti (il determinante di una matrice a scala è ovviamente molto più facile da calcolare).

Guardiamo quali sono queste operazioni elementari:

1. Scambiare una riga con un'altra (banale che la cosa non cambi le soluzioni di un sistema, non poi così banale che un'operazione del genere su una matrice ne lasci invariato il rango)

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \\ \vdots \\ b_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

2. Moltiplicare per uno stesso scalare una intera riga (si può fare lo stesso commento fatto per il punto precedente)

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ \lambda b_i = \lambda a_{i1}x_1 + ... + \lambda a_{in}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ \lambda a_{i1} & \lambda a_{i2} & \cdots & \lambda a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

3. Sommare una riga ad un'altra riga (si sfrutta il fatto che se $a = b$ (prima riga), e $c = d$ (l'altra riga), allora $a + c = b + d$)

$$\begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_i = a_{i1}x_1 + ... + a_{in}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} b_1 = a_{11}x_1 + ... + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_i + b_1 = a_{i1}x_1 + a_{11}x_1 + ... + a_{in}x_n + a_{1n}x_n \\ \vdots \\ b_m = a_{m1}x_1 + ... + a_{mn}x_n \end{cases}$$

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \Longrightarrow \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{i1} + a_{11} & a_{i2} + a_{12} & \cdots & a_{in} + a_{1n} \\ \vdots & & \ddots & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Queste operazioni andranno applicate su un sistema per ridurlo nella forma seguente (non ci mettiamo nel caso in cui non ci siano equazioni linearmente dipendenti, in particolare non ci siano più equazioni che incognite, cioè $m > n$ in quanto se siamo in questo caso potremmo ridurci subito al caso che prendiamo in considerazione eliminando quelle linearmente dipendenti dalle altre)

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + ... + a_{m,m}x_m + ... + a_{1n}x_n = b_1 \\ \qquad a_{12}x_2 + ... + a_{m,m}x_m + ... + a_{1n}x_n = b_2 \\ \qquad\qquad a_{m,m}x_{m,m} + ... + a_{mn}x_n = b_m \end{cases} \tag{7.2}$$

A questo punto si parte dall'ultima equazione ponendo come parametri $n - m$ incognite (infatti in generale la dimensione dello spazio delle soluzioni di un sistema sarà $n-r$ con r il rango della matrice associata che nelle ipotesi in cui ci siamo messi, ovvero di equazioni linearmente indipendenti, sarà proprio m) e poi sostituendo in quella sopra si va avanti fino ad aver esaurite tutte le incognite. Se nell'affrontare questo procedimento ci si imbatte in assurdi come $0 = 1$ si potrà decretare immediatamente la non risolubilità del sistema.

Si sono svolti esercizi su risoluzione di sistemi e calcolo di rango di matrici usando il metodo sopra esposto