7 | Meccanica dei fluidi

Esercizio B3 prova del 17/06/2016 *Si consideri una palla di densità ρ e raggio R ancorata sul fondo di una piscina di profondità h, piena di acqua (densità ρ_L). Ad un certo punto si taglia lo spago che trattiene la palla e questa compie un balzo fuori dall'acqua.*

(i) Trascurando ogni forma di attrito, si calcoli l'altezza massima (H) raggiunta dalla palla rispetto al pelo

dell'acqua

(ii) Con le stesse ipotesi del punto a si calcoli il tempo necessario a percorrere il tratto (h) in acqua e quello in

aria (fino alla altezza H).

(iii) Sempre trascurando gli attriti, si avrebbe un moto armonico? E' possibile calcolare il periodo del moto?

(iv) Come cambierebbe la massima altezza H supponendo che in acqua sia presente la forza di Stokes e che la piscina sia sufficientemente profonda da permettere alla palla di raggiungere la velocità limite?

1. Il primo punto può essere affrontato partendo dalla conservazione dell'energia prendendo come zero dell'energia potenziale il fondo della vasca. Abbiamo che

$$E_{in} = 0 = E_{fin} = F_{Arch} h - m_p g(H + h) \tag{7.1}$$

da cui, sapendo che $F_{Arch} = \frac{4\pi}{3} R^3(\rho_L - \rho_p) > 0$,

$$H = h\frac{\rho_L - \rho_p}{\rho_p}. \tag{7.2}$$

In realtà questa soluzione non è esatta in quanto usa l'approssimazione di massa puntiforme, cioè non considera il fatto che quando la sfera comincia ad emergere la forza di Archimede agisce solo in ragione della calotta sommersa che ha volume $V_S = \pi l^2(R - l/3)$ essendo l l'altezza della calotta e che il lavoro della forza peso va considerato per un'altezza totale $H + h - R$ dovuto al fatto che il CM della sfera è ad un'altezza R rispetto al fondo della vasca, zero del potenziale.

2. Sempre nell'approssimazione di massa puntiforme avremo che, sia fuori che dentro l'acqua, il moto è uniformemente accelerato e per cui il tempo di percorrenza è dato dalla relazione $t = \sqrt{2s/a}$ che nei due casi diventa

$$t_h = \sqrt{\frac{2h\rho_p}{g(\rho_l - \rho_p)}} \quad ; \quad t_H = \sqrt{\frac{2H}{g}} \tag{7.3}$$

3. chiaramente il moto sarebbe periodico ma non armonico dato che le forze di richiamo non sono proporzionali alla distanza da un centro del moto ma sono invece costanti a tratti. Il periodo è pari a $T = 2(t_h + t_H)$

4. La velocità limite si trova ponendo

$$\mathbf{F}_{Arch} + \mathbf{P} + \mathbf{F}_{Stokes} = 0 \tag{7.4}$$

dove $\mathbf{F}_{Stokes} = -6\pi\eta R\mathbf{v}$. Risolvendo la precedente equazione per $v = v_{lim}$ si ottiene

$$v_{lim} = \frac{2(\rho_L - \rho_p)}{9\eta} R^2 g. \tag{7.5}$$

La massima altezza raggiungibile quindi segue dal principio di conservazione dell'energia (applicabile soltanto dopo che la sfera è uscita dall'acqua)

$$\frac{1}{2} m v_{lim}^2 = mgH \rightarrow H = \frac{v_{lim}^2}{2g} \tag{7.6}$$

Esercizio B3 prova del 20/09/2016 *Una boa assimilabile ad un cilindro di massa M e diametro D galleggia in mare rimanendo in posizione verticale. La densità dell'acqua di mare sia ρ:*

(i) si calcoli di quanto affonda la boa quando un uomo di massa m ci sale sopra

(ii) dimostrare che, dopo il tuffo della persona, la boa acquista un moto armonico semplice

(iii) si calcoli il periodo del moto armonico.

1. la densità del cilindro è $\rho_c = 4M/\pi D^2 L$ dove L è l'altezza del cilindro. La boa galleggia, affonda solo per un'altezza h tale per cui

$$\mathbf{P} + \mathbf{F}_{Arch} = 0 \tag{7.7}$$

da cui segue

$$h = \frac{4M}{(\rho_w - \rho_c)\pi D^2}. \tag{7.8}$$

La forza di Archimede dovrà chiaramente essere eguale e opposta alla forza peso dell'uomo, dunque che

$$mg = (\rho_w - \rho_c)\frac{\pi D^2}{4}\Delta h \to \Delta h = \frac{4m}{(\rho_w - \rho_c)\pi D^2} \tag{7.9}$$

e tutto continua a galleggiare se $h + \Delta h < L$.

2. Nel momento in cui l'uomo si tuffa la boa è scostata dalla sua posizione di equilibrio di una quantità Δh. La forza che agisce sulla boa è

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{Arch} + \mathbf{P} = \mathbf{F}_{Arch,h} + \mathbf{F}_{Arch,\Delta h} + \mathbf{P} = \mathbf{F}_{Arch,\Delta h} \tag{7.10}$$

dove l'ultima uguaglianza segue dalla condizione di galleggiamento $\mathbf{F}_{Arch,h} + \mathbf{P} = 0$. Esplicitando la componente della forza lungo l'asse del moto $F = -(\rho_w - \rho_p)g\pi\frac{D^2}{4}\Delta h = -k\Delta h$, da questo si vede che la forza di richiamo è *linearmente* proporzionale allo scostamento della posizione di equilibrio dunque il moto è armonico.

3. Per quanto visto nel punto precedente il periodo si calcola come

$$T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{m}{k}} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{4m}{(\rho_w - \rho_p)g\pi D^2}} \tag{7.11}$$