Lezione 6

Cambiamenti di base e matrici associate

Teorema 6.1. *Dato uno spazio vettoriale V e una base $\{\mathbf{e}_i\}$, è possibile esprimere ogni vettore $\mathbf{v} \in V$ come*

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i \tag{6.1}$$

dove i coefficienti a_i, dette coordinate di $\mathbf{v}$ rispetto alla base di $\{\mathbf{e}_i\}$ sono univocamente determinati.

Dimostrazione. I coefficienti esistono in quanto per ipotesi $\{\mathbf{e}_i\}$ è una base, in particolare sono generatori, ora voglio l'unicità, supponiamo che ci siano altri coefficienti b_j che soddisfano, allora

$$\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} a_i \mathbf{e}_i = \sum_{j=1}^{n} b_j \mathbf{e}_j \Rightarrow \sum_{i=1}^{n} (a_i - b_i) \mathbf{e}_i = \mathbf{0} \tag{6.2}$$

dove nell'ultimo passaggio della (6.2) si è scritta una combinazione lineare di vettori linearmente indipendenti con il vettore nullo, che obbliga, per definizione di lineare indipendenza, i coefficienti $(a_i - b_i)$ a essere nulli ovvero $a_i = b_i$, la tesi.

□

In pratica una base può essere considerata a tutti gli effetti un sistema di riferimento, in quanto ad ogni vettore vengono associate una unica n-upla di numeri che possono essere considerati a tutti gli effetti come coordinate. Ci si pone il problema allora di come cambino le coordinate di uno specifico vettore se cambio sistema di riferimento ovvvero cambio base. Per la risoluzione di questo problema vengono in aiuto le matrici, in quanto si può associare all'operazione di cambio di base una matrice, detta matrice di cambiamento di base. Si ha quindi il seguente

Teorema 6.2. *Siano $\mathcal{B} = \{\mathbf{v}_i\}$, $\mathcal{B}' = \{\mathbf{v}_j^{'}\}$ due basi di uno stesso spazio vettoriale n dimensionale, allora la matrice di cambiamento di base C, ovvero la matrice tale per cui $C\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{\mathbf{v}}'$ (dove $\tilde{\mathbf{v}}$ è un vettore di $\mathbb{R}^n$ dato da i coefficienti del vettore $\mathbf{v}$ nella base $\mathcal{B}$ e $\tilde{\mathbf{v}'}$ l'analogo vettore riferito alla base $\mathcal{B}'$) ha per colonne le coordinate dei $\mathbf{v}_i$ espressi rispetto ai $\mathbf{v}_j'$.*

Dimostrazione. Esprimiamo i vettori in $\mathcal{B}$ rispetto alla base $\mathcal{B}'$, mentre considereremo un generico vettore $\mathbf{v}$ espresso come $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^{n} x_i \mathbf{v}_i$, quindi $\tilde{\mathbf{v}} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1 &= a_{11}\mathbf{v}_1' + ... + a_{1n}\mathbf{v}_n' \\ \mathbf{v}_2 &= a_{21}\mathbf{v}_1' + ... + a_{2n}\mathbf{v}_n' \\ &\vdots \\ \mathbf{v}_n &= a_{n1}\mathbf{v}_1' + ... + a_{nn}\mathbf{v}_n' \end{aligned} \tag{6.3}$$

considerando $\mathbf{v}$, esso potrà essere scritto come

$$\mathbf{v} = \sum_{i,j} x_i a_{ij} \mathbf{v}_j' = \sum_j x_j^{'} \mathbf{v}_j' \tag{6.4}$$

ovvero, chiamando A la matrice dei coefficienti (a_{ij}) il sistema può essere scritto come

$$\tilde{\mathbf{v}}^{'} = C\tilde{\mathbf{v}} \tag{6.5}$$

Scegliendo $\tilde{\mathbf{v}}$ come un vettore della vecchia base $\mathcal{B}$ si vede che le colonne di C sono le coordinate dei vettori della base $\mathcal{B}$ nella nuova base $\mathcal{B}'$. □

Notare. Perchè la matrice con cui trasformano i coefficienti è l'inversa di quella con cui trasformano i vettori della base? pensiamo a una dilatazione dello spazio in cui i vettori della *nuova* base sono tutti ad esempio raddoppiati, dunque la matrice rappresentativa è $A = 2\mathbb{I}$. Un vettore è un oggetto che va pensato fisso nello spazio, ma se adesso è raddoppiata la sua unità di misura la sua lunghezza in questa nuova unità di misura è dimezzata. 1 km è 1 espresso in km ma è $\simeq$0.625 mi perchè un miglio è $\simeq$ 1.6 km.

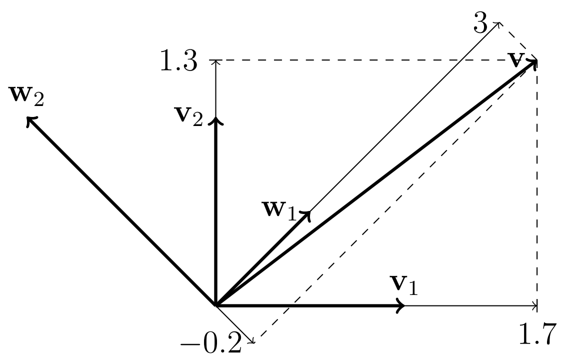

Figura 6.1: *Esempio di vettore espresso rispetto a basi differenti*

6.1 Esercizi

Esercizio 6.3. Come cambia la matrice rappresentativa di un'applicazione lineare sotto un cambiamento di base rappresentato da C? *Suggerimento*: applicare a dx e sx il cambiamento di base ed esprimere il vettore di partenza nella nuova base.

Esercizio 6.4. Si considerino i seguenti vettori di $\mathbb{R}^3$:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.6}$$

(1) Verificare che i vettori $\{\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_3\}$ costituiscono una base $\mathcal{B}$ di $\mathbb{R}^3$;

(2) scrivere le equazioni del cambiamento di base relative al passaggio dalla base canonica $\mathcal{B}_c$ a $\mathcal{B}$;

(3) calcolare le coordinate rispetto alla base $\mathcal{B}$ del vettore $\mathbf{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

Esercizio 6.5. trovare la matrice del cambiamento di base tra i seguenti insiemi di vettori:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

e

$$\mathbf{w}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \mathbf{w}_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Sono stati proposti poi altri esercizi simili.