

6 | Dinamica dei sistemi di punti e dei corpi estesi IV

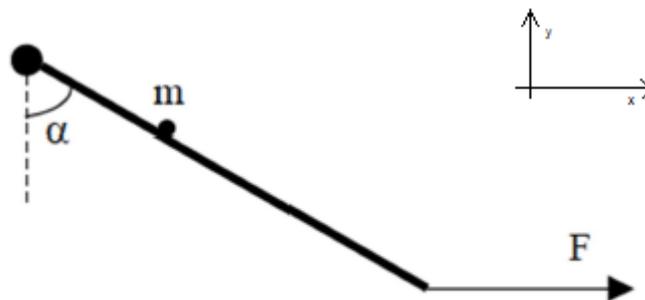


Figura 6.1

problema B1 prova del 20/09/16 Preso il sistema di riferimento in figura 6.1 con l'asse z uscente dal foglio si scrive la condizione di annullamento del momento totale delle forze, dove il momento della forza di gravità per un corpo esteso è uguale a quello della forza di gravità agente su un punto materiale di massa uguale alla massa totale del corpo posto nel CM. La reazione vincolare della massetta m agisce a $l/3$.

$$\mathbf{M} = \left(-mg\frac{l}{3}\sin(\alpha) - Mg\frac{l}{2}\sin(\alpha) + lF\sin\left(\frac{\pi}{2} + \alpha\right)\right)\mathbf{u}_z = 0 \quad (6.1)$$

Sfruttando il fatto che $\sin(\pi/2 + \alpha) = \cos(\alpha)$ si ottiene

$$F = \left(mg\frac{l}{3} + Mg\frac{l}{2}\right)\tan(\alpha). \quad (6.2)$$

Per calcolare la reazione vincolare basta imporre la condizione di equilibrio

$$\mathbf{F} + m\mathbf{g}\mathbf{u}_y + M\mathbf{g}\mathbf{u}_y + \mathbf{R} = 0 \quad (6.3)$$

che da

$$\mathbf{R} = (-F, mg + Mg) \quad (6.4)$$

Per la seconda equazione cardinale della dinamica vale (scegliendo ovviamente il polo nel punto fisso)

$$\frac{d}{dt}L = I \frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(mg \frac{l}{3} + Mg \frac{l}{2} \right) \sin(\alpha). \quad (6.5)$$

Per piccole oscillazioni, nel limite in cui $\sin(\alpha) \simeq \alpha$ si ha l'equazione di un moto armonico con periodo dato da

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mg \frac{l}{3} + Mg \frac{l}{2}}} = 2\pi \sqrt{\frac{\frac{1}{3}Ml^2 + \frac{1}{9}ml^2}{mg \frac{l}{3} + Mg \frac{l}{2}}} \quad (6.6)$$

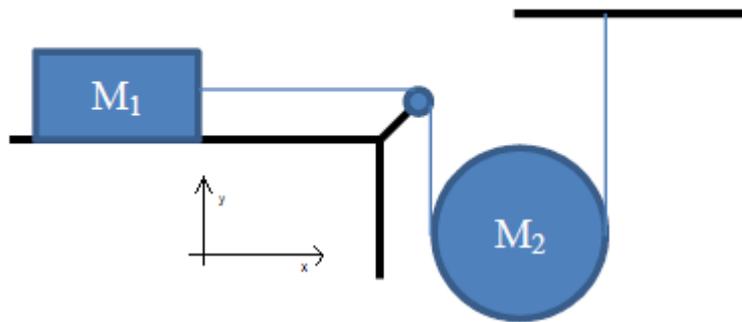


Figura 6.2

problema B2 prova del 29/08/16 Si noti innanzitutto che, considerato anche il verso del SR scelto, uno spostamento in orizzontale verso destra di una quantità Δx del blocchetto provocherebbe uno spostamento verticale della carrucola pari a $\Delta y = -\Delta x/2$. Finché le corde sono tese vi sarà la stessa relazione fra le accelerazioni ovvero

$$a_2 = \frac{d^2\Delta y}{dt^2} = -\frac{1}{2} \frac{d^2\Delta x}{dt^2} = -\frac{a_1}{2} = -\frac{a}{2} \quad (6.7)$$

fatta questa doverosa premessa si scrivono le equazioni per le le componenti delle forze e dei momenti:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 - M_2g = -M_2\frac{a}{2} \\ T_1 = M_1a \\ T_2R - T_1R = I_2\alpha = M_2\frac{R^2}{2}\frac{a}{2R} \end{cases} \quad (6.8)$$

La soluzione di questo sistema fornisce le tensioni T_1 e T_2

$$T_1 = \frac{M_2g}{2 + \frac{3M_2}{4M_1}} \quad T_2 = \left(\frac{M_2}{4M_1} + 1 \right) T_1. \quad (6.9)$$

Se si introduce il coefficiente d'attrito μ (il testo del problema non lo specifica ma assumeremo che sia il coefficiente dinamico e che sia anche $\mu_s = \mu$) alla seconda equazione del sistema semplicemente si aggiunge una forza d'attrito, con l'accortezza di specificare se la trazione superi o meno il limite statico

$$\begin{cases} T_1 - \mu M_1g = M_1a & T_1 > \mu M_1g \\ T_1 = f_a & T_1 \leq \mu M_1g \end{cases} \quad (6.10)$$

Perché il sistema sia fermo bisogna imporre $T_1 \leq \mu M_1g$ e $a = 0$. Si ottiene

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = M_2g \\ T_2 - T_1 = 0 \end{cases} \quad (6.11)$$

da cui

$$M_1 > \frac{M_2}{2\mu} \quad (6.12)$$

6.1 Formule utili

- **Moti relativi**

Accelerazioni relative

$$\mathbf{a} = \mathbf{a}' + \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}' + 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

Accelerazione di trascinamento

$$\mathbf{a}_t = \mathbf{a}_0 + \boldsymbol{\omega} \times (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{r}') + \frac{d\boldsymbol{\omega}}{dt} \times \mathbf{r}'$$

Accelerazione di Coriolis

$$\mathbf{a}_{\text{cor}} = 2\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{v}'$$

- **Sistemi di punti e corpo rigido**

Massa totale

$$M = \sum_i m_i \rightarrow \int_V dm = \int_V \rho dV$$

Centro di massa (CM)

$$\bar{\mathbf{r}}_{CM} = \frac{1}{M} \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i m_i \rightarrow \frac{1}{M} \int_V \bar{\mathbf{r}} \rho dV$$

Momento angolare

$$L = \sum_i \bar{\mathbf{r}}_i \times m_i \bar{\mathbf{v}}_i$$

Velocità del CM

$$\bar{\mathbf{v}}_{CM} = \frac{\mathbf{P}_{\text{tot}}}{M}$$

Accelerazione del CM

$$M\bar{\mathbf{a}}_{CM} = \bar{\mathbf{R}}^{(E)}$$

Variazione di \bar{L}

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\mathbf{M}}^{(E)} - \bar{\mathbf{v}}_O \times M\bar{\mathbf{v}}_{CM}$$

→ *asse di rotazione fisso*

$$\frac{d\bar{L}}{dt} = \bar{\boldsymbol{\omega}} \times \bar{L}$$

Energia cinetica rotazionale

$$\frac{1}{2} I \boldsymbol{\omega}^2$$

Teorema di König (I)

$$\bar{L} = \bar{L}_{\text{del CM}} + \bar{L}_{\text{rispetto al CM}}$$

Teorema di König (II)

$$E_k = E_{k,\text{del CM}} + E_{k,\text{rispetto al CM}}$$

Momento di inerzia rispetto a \hat{z}

$$I = \int_V \rho(x^2 + y^2) dV$$

Teorema di Huygens-Steiner

$$I = I_{CM} + Md^2$$

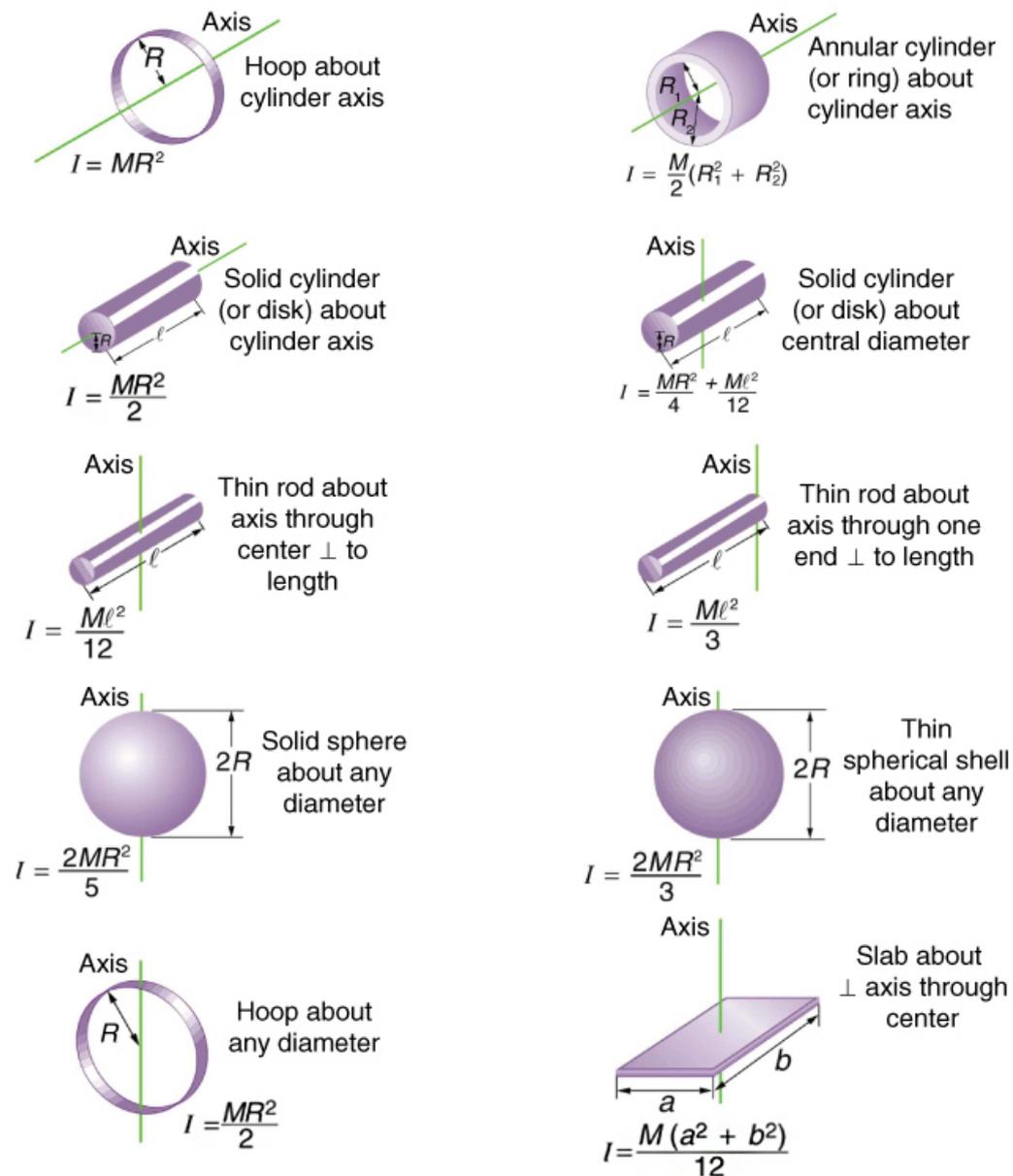
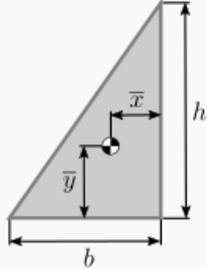
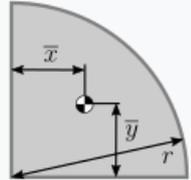
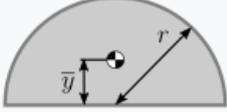
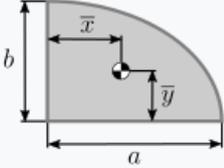
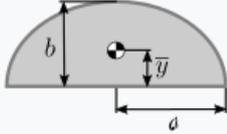
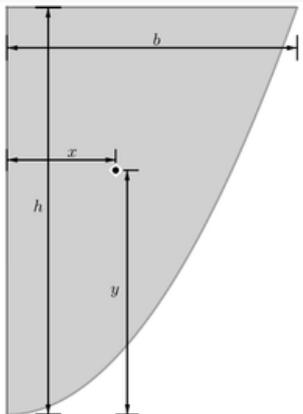


Figura 6.3: Alcuni momenti di inerzia

Shape	Figure	\bar{x}	\bar{y}	Area
Right-triangular area		$\frac{b}{3}$	$\frac{h}{3}$	$\frac{bh}{2}$
Quarter-circular area ^[1]		$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{4}$
Semicircular area ^[2]		0	$\frac{4r}{3\pi}$	$\frac{\pi r^2}{2}$
Quarter-elliptical area		$\frac{4a}{3\pi}$	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{4}$
Semielliptical area		0	$\frac{4b}{3\pi}$	$\frac{\pi ab}{2}$
Semiparabolic area The area between the curve $y = \frac{h}{b^2}x^2$ and the y axis, from $y = 0$ to $y = h$		$\frac{3b}{8}$	$\frac{3h}{5}$	$\frac{2bh}{3}$

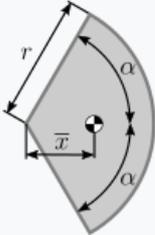
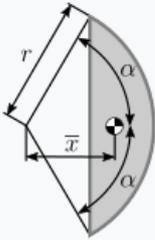
Parabolic area	The area between the curve $y = \frac{h}{b^2}x^2$ and the line $y = h$	0	$\frac{3h}{5}$	$\frac{4bh}{3}$
Parabolic spandrel	The area between the curve $y = \frac{h}{b^2}x^2$ and the x axis, from $x = 0$ to $x = b$	$\frac{3b}{4}$	$\frac{3h}{10}$	$\frac{bh}{3}$
General spandrel	The area between the curve $y = \frac{h}{b^n}x^n$ and the x axis, from $x = 0$ to $x = b$	$\frac{n+1}{n+2}b$	$\frac{n+1}{4n+2}h$	$\frac{bh}{n+1}$
Circular sector		$\frac{2r \sin(\alpha)}{3\alpha}$	0	αr^2
Circular segment		$\frac{4r \sin^3(\alpha)}{3(2\alpha - \sin(2\alpha))}$	0	$\frac{r^2}{2}(2\alpha - \sin(2\alpha))$
Quarter-circular arc	The points on the circle $x^2 + y^2 = r^2$ and in the first quadrant	$\frac{2r}{\pi}$	$\frac{2r}{\pi}$	$L = \frac{\pi r}{2}$
Semicircular arc	The points on the circle $x^2 + y^2 = r^2$ and above the x axis	0	$\frac{2r}{\pi}$	$L = \pi r$
Arc of circle	The points on the curve (in polar coordinates) $r = \rho$, from $\theta = -\alpha$ to $\theta = \alpha$	$\frac{\rho \sin(\alpha)}{\alpha}$	0	$L = 2\alpha\rho$
Right circular solid cone	The distance is from base to the apex	$h/4$		

Figura 6.4: centri di massa da https://en.wikipedia.org/wiki/List_of_centroids

