# 6 | Dinamica dei sistemi di punti e dei corpi estesi IV

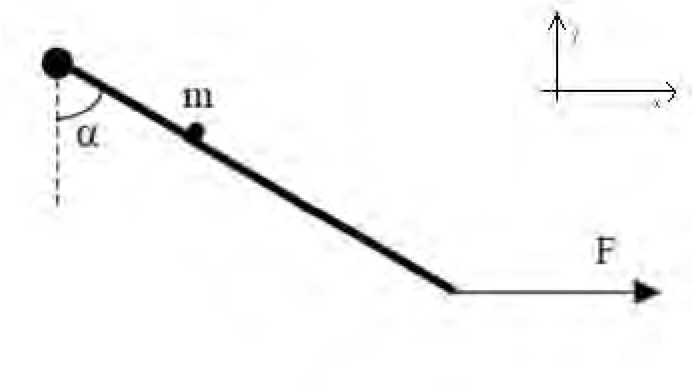


**Figura 6.1**

**problema B1 prova del 20/09/16** Preso il sistema di riferimento in figura 6.1 con l'asse z uscente dal foglio si scrive la condizione di annullamento del momento totale delle forze, dove il momento della forza di gravità per un corpo esteso è uguale a quello della forza di gravità agente su un punto materiale di massa uguale alla massa totale del corpo posto nel CM. La reazione vincolare della massetta $m$ agisce a $l/3$.

$$\mathbf{M} = (-mg\frac{l}{3}\sin(\alpha) - Mg\frac{l}{2}\sin(\alpha) + lF\sin(\frac{\pi}{2}+\alpha))\mathbf{u}_z = 0 \qquad (6.1)$$

Sfruttando il fatto che $\sin(\pi/2+\alpha) = cos(\alpha)$ si ottiene

$$F = \left(mg\frac{l}{3} + Mg\frac{l}{2}\right)\tan(\alpha). \qquad (6.2)$$

Per calcolare la reazione vincolare basta imporre la condizione di equilibrio

$$\mathbf{F} + mg\mathbf{u}_y + Mg\mathbf{u}_y + \mathbf{R} = 0 \qquad (6.3)$$

che da

$$\mathbf{R} = -(F, mg + Mg) \tag{6.4}$$

Per la seconda equazione cardinale della dinamica vale (scegliendo ovviamente il polo nel punto fisso)

$$\frac{d}{dt}L = I\frac{d^2\alpha}{dt^2} = \left(mg\frac{l}{3} + Mg\frac{l}{2}\right)\sin(\alpha). \tag{6.5}$$

Per piccole oscillazioni, nel limite in cui $\sin(\alpha) \simeq \alpha$ si ha l'equazione di un moto armonico con periodo dato da

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{I}{mg\frac{l}{3} + Mg\frac{l}{2}}} = 2\pi\sqrt{\frac{\frac{1}{3}Ml^2 + \frac{1}{9}ml^2}{mg\frac{l}{3} + Mg\frac{l}{2}}} \tag{6.6}$$

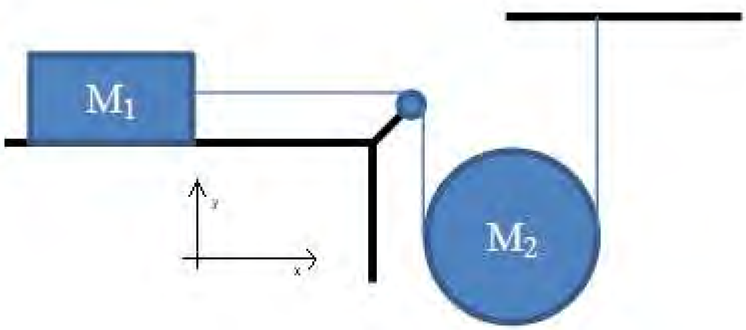


**Figura 6.2**

**problema B2 prova del 29/08/16** Si noti innanzitutto che, considerato anche il verso del SR scelto, uno spostamento in orizzontale verso destra di una quantità $\Delta x$ del blocchetto provocherebbe uno spostamento verticale della carrucola pari a $\Delta y = -\Delta x/2$. Finché le corde sono tese vi sarà la stessa relazione fra le accelerazioni ovvero

$$a_2 = \frac{d^2\Delta y}{dt^2} = -\frac{1}{2}\frac{d^2\Delta x}{dt^2} = -\frac{a_1}{2} = -\frac{a}{2} \tag{6.7}$$

fatta questa doverosa premessa si scrivono le equazioni per le le componenti delle forze e dei momenti:

$$\begin{cases} T_1 + T_2 - M_2 g = -M_2 \frac{a}{2} \\ T_1 = M_1 a \\ T_2 R - T_1 R = I_2 \alpha = M_2 \frac{R^2}{2} \frac{a}{2R} \end{cases} . \tag{6.8}$$

La soluzione di questo sistema fornisce le tensioni $T_1$ e $T_2$

$$T_1 = \frac{M_2 g}{2 + \frac{3M_2}{4M_1}} \qquad T_2 = \left(\frac{M_2}{4M_1} + 1\right) T_1. \tag{6.9}$$

Se si introduce il coefficiente d'attrito $\mu$ (il testo del problema non lo specifica ma assumeremo che sia il coefficiente dinamico e che sia anche $\mu_s = \mu$) alla seconda equazione del sistema semplicemente si aggiunge una forza d'attrito, con l'accortezza di specificare se la trazione superi o meno il limite statico

$$\begin{cases} T_1 - \mu M_1 g = M_1 a & T_1 > \mu M_1 g \\ T_1 = f_a & T_1 \leq \mu M_1 g \end{cases} . \tag{6.10}$$

Perché il sistema sia fermo bisogna imporre $T_1 \leq \mu M_1 g$ e $a = 0$. Si ottiene

$$\begin{cases} T_1 + T_2 = M_2 g \\ T_2 - T_1 = 0 \end{cases} \tag{6.11}$$

da cui

$$M_1 > \frac{M_2}{2\mu} \tag{6.12}$$