

Lezione 5

Applicazioni e sistemi lineari, teorema delle dimensioni

Definizione 5.1. Sia $f : V \rightarrow W$, essa si dice lineare se $\forall \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2 \in V, \forall h, k \in K, f(h\mathbf{v}_1 + k\mathbf{v}_2) = hf(\mathbf{v}_1) + kf(\mathbf{v}_2)$.

Teorema 5.2. Data $f : V \rightarrow W$, fissate delle basi $\{\mathbf{v}_i\}, \{\mathbf{w}_j\}$ rispettivamente di V, W , $\exists A \in M(n, m)$ tale che $f(\mathbf{v}) = A\mathbf{v} \forall \mathbf{v} \in V$ (ovvero posso rappresentare l'azione della mia applicazione lineare per mezzo di una matrice, detta matrice associata a f).

Dimostrazione. Posso vedere $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$ per certi coefficienti a_i e $f(\mathbf{v}_k) = \sum_{j=1}^m b_{kj} \mathbf{w}_j \forall k$ per certi b_{kj} , allora $f(\mathbf{v}) = \sum_{i,j} a_i b_{ij} \mathbf{w}_j$. La matrice di elementi (b_{ij}) è la matrice A che cercavamo, essa fissate le basi è unica. \square

Questo teorema ci dice che le applicazioni lineari sono in corrispondenza biunivoca con le matrici, quindi possiamo parlare indifferentemente di applicazioni lineari o delle loro matrici associate. Le seguenti definizioni vengono date per le applicazioni lineari ma sono estendibili in modo ovvio anche per le matrici.

Definizione 5.3. Data $f : V \rightarrow W$, chiamo $Ker(f) = \{\mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{0}\}$, chiamo $Im(f) = \{\mathbf{w} \in W \mid \exists \mathbf{v} \in V \mid f(\mathbf{v}) = \mathbf{w}\}$

Teorema 5.4. Sia $f : V \rightarrow W$ lineare e iniettiva, allora $Ker(f) = \{\mathbf{0}\}$

Dimostrazione. Per una applicazione lineare si ha sempre $f(\mathbf{0}) = \mathbf{0}$ in quanto per linearità si ha che

$$f(\mathbf{0}) = f(\mathbf{0} + \mathbf{0}) = f(\mathbf{0}) + f(\mathbf{0}) \Rightarrow f(\mathbf{0}) = \mathbf{0} \quad (5.1)$$

essendo la funzione iniettiva, lo $\mathbf{0}$ sarà l'unico vettore che la funzione manda in zero. \square

Teorema 5.5 (DELLE DIMENSIONI). Sia $f : V \rightarrow W$ lineare, siano n, k, r le dimensioni rispettivamente di $V, Ker(f)$ e $Im(f)$, allora si ha

$$n = k + r. \quad (5.2)$$

Teorema 5.6. *Sia $f : V \rightarrow W$ lineare, se ne esiste una biunivoca tra i due spazi allora essi hanno la stessa dimensione*

Dimostrazione. Sia $\mathbf{v} = \sum_{i=1}^n a_i \mathbf{v}_i$ con $\{\mathbf{v}_i\}$ base di V , allora

$$f(\mathbf{v}) = \sum_{i=1}^n a_i f(\mathbf{v}_i)$$

gli $\{f(\mathbf{v}_i)\}$ generano l'immagine di f , ma essa corrisponderà a W per l'ipotesi di suriettività, ora non resta che applicare il 5.5 sapendo che per l'ipotesi di iniettività $\text{Ker}(f) = \{\mathbf{0}\}$ per il 5.4. \square

Per la corrispondenza biunivoca introdotta prima tra matrici e sistemi lineari e grazie alla possibilità di rappresentare un sistema del tipo

$$\begin{aligned} b_1 &= a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n \\ b_2 &= a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n \\ &\vdots \\ b_m &= a_{m1}x_1 + \dots + a_{mn}x_n \end{aligned} \tag{5.3}$$

come $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ e trasferire il tutto a operazioni sulle matrici

Teorema 5.7 (STRUTTURA SISTEMI LINEARI). *Le soluzioni di un sistema lineare si compongono della generale soluzione del sistema omogeneo e di una soluzione particolare*

Dimostrazione. Posso vedere il sistema come $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$, se si indica con \mathbf{x}_0 una soluzione del sistema omogeneo e con \mathbf{x}_p una soluzione particolare, si avrà

$$A(\mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p) = A\mathbf{x}_0 + A\mathbf{x}_p = A\mathbf{x}_p = \mathbf{b}$$

ovvero $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{x}_p$ risolve anche essa il sistema. In particolare si avrà che la dimensione delle soluzioni del sistema eguaglierà la dimensione del $\text{ker}(A)$. \square

5.1 Esercizi

Esercizio 5.8. Si consideri la seguente applicazione $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ x - y + z \\ z - 2x - y \\ x + z \end{pmatrix}$$

- (1) Determinare la matrice A associata all'applicazione lineare L nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^4 .
- (2) Determinare la dimensione di $\text{Im}L$ e $\ker L$.
- (3) Determinare una base di $\text{Im}L$.
- (4) Completare la base di $\text{Im}L$ a una base di \mathbb{R}^4 .

Esercizio 5.9. Si consideri la seguente applicazione $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 - 2y - z \\ y + z \end{pmatrix}$$

- (1) Determinare la matrice A associata all'applicazione lineare L nelle basi canoniche di \mathbb{R}^3 e \mathbb{R}^2 .
- (2) Determinare la dimensione di $\text{Im}L$ e $\ker L$.
- (3) Stabilire se $\mathbf{v} = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \end{pmatrix} \in \text{Im}L$.
- (4) Sia $U \subset \mathbb{R}^3$ il sottospazio di equazione $2x + z = 0$ determinare $\dim(L(U))$.

Esercizio 5.10. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita come segue sugli elementi della base canonica:

$$L(\mathbf{e}_1) = \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad L(\mathbf{e}_2) = \mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3 \quad L(\mathbf{e}_3) = 2\mathbf{e}_1 + \mathbf{e}_2 + \mathbf{e}_3$$

- (1) Determinare la matrice A associata all'applicazione lineare L rispetto alla base canonica.
- (2) Determinare la dimensione di $\text{Im}L$ e $\ker L$.
- (3) Determinare le equazioni di $\text{Im}L$ e $\ker L$.

- (4) Determinare un piano per l'origine $U \subset \mathbb{R}^3$ la cui immagine sia una retta passante per l'origine di \mathbb{R}^3 .

Esercizio 5.11. Si consideri l'applicazione lineare $L : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definita da:

$$L \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + hy \\ hx + y \\ (h + 1)y \end{pmatrix}$$

con $h \in \mathbb{R}$, consideratala base canonica di \mathbb{R}^2

- (1) Determinare le immagini dei vettori della base.
- (2) Scrivere la matrice A rappresentativa dell'applicazione lineare nelle basi canoniche di \mathbb{R}^2 e \mathbb{R}^3 .
- (3) Stabilire per quale/i valori di h l'applicazione è iniettiva.
- (4) Posto $h = 1$ determinare la/le equazioni cartesiane di $\text{Im}L$.
- (5) Posto $h = -1$ determinare una base di $\text{ker}L$.

Esercizio 5.12. Svolgere la prova <http://www-dimat.unipv.it/~bonsante/didattica/geoalg14-15/ap-16-02-04/testo1.pdf> a meno del punto 4. 7. e 8.

Esercizio 5.13. Si consideri lo spazio dei polinomi di grado n , $P[n]$ e l'applicazione lineare derivata che consideriamo come $D : P[n] \rightarrow P[n]$.

- (1) scrivere la matrice rappresentativa nella base canonica dei due spazi.
- (2) La matrice è nilpotente?