# 5 | Dinamica dei sistemi di punti e dei corpi estesi III

**Calcolare la posizione del CM e il momento di inerzia del sistema in fig. 5.1 per gli assi a e b e il momento di inerzia relativo al centro di massa**

- Calcolo del CM: Si assume il sistema di riferimento con origine nel centro del cerchio e asse x tangente al cerchio piccolo. Per simmetria $x_{CM} = 0$. Sia $m$ la massa del cerchio mancante e $M$ la massa del cerchio senza foro. Il cerchio mancante può essere visto come un cerchio di "massa" $-m$ sovrapposto al cerchio pieno. Dunque, visto che le coordinate del CM del cerchio intero sono l'origine del nostro sistema di riferimento e quelle del cerchio di massa negativa sono $(0, R/2)$

$$y_{CM} = \frac{M \cdot (0) - m \cdot (\frac{R}{2})}{M - m} = -\frac{\frac{m}{M}\frac{R}{2}}{1 - \frac{m}{M}} \tag{5.1}$$

  Il rapporto delle masse è uguale a quello delle aree per una densità costante, $m/M = 1/4$ dunque $y_{CM} = -R/6$

- Per calcolare il momento di inerzia rispetto all'asse $a$ ragiono allo stesso modo: al momento di inerzia del disco pieno ($\frac{3}{2}MR^2$) sottraggo quello del disco "vuoto" ($\frac{3}{2}m\frac{R^2}{4}$) dunque

$$I_a = \frac{3}{2}MR^2\left(1 - \frac{m}{4M}\right) = \frac{45}{32}MR^2 \tag{5.2}$$

  Considerando che $I_{a,CM} = (M - m)R_{CM}^2 = \frac{3}{4}M\frac{49}{36}R^2 = \frac{49}{48}MR^2$ e che $I_a = I_{a,CM} + I_{rel}$ si ottiene

$$I_{rel} = \frac{37}{96}MR^2 \tag{5.3}$$

Il calcolo per l'asse *b)* è analogo e fornisce per $I_{rel}$ lo stesso risultato. Chiaramente questo non è l'unico modo di calcolare $I_{rel}$ e l'equivalenza di tutti i punti di vista riposa sul teorema di Huygens-Steiner.

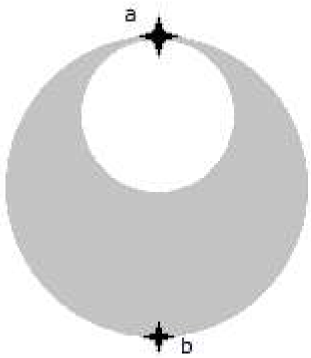


**Figura 5.1**

**Esercizio 6.11** Il problema prevede due fasi.

- Nella prima fase viene richiesto il lavoro necessario per accelerare il sistema dalla situazione di quiete fino a farlo ruotare con $\omega_1 = 15$ rad/s. Per il teorema delle forze vive il lavoro compiuto dalla forza che causa l'accelerazione (di qualsiasi natura essa sia) è pari alla variazione totale di energia cinetica rotazionale del corpo. $L = \frac{1}{2}I(\omega_1^2 - \omega_0^2) = \frac{1}{2}I(\omega_1^2)$ conoscendo $\omega_1$ dobbiamo solo calcolare $I$.
  Per la sfera piena relativamente a un diametro vale $I = \frac{2}{5}mR^2$, per il guscio vale $I = \frac{2}{3}(\frac{m}{4})R^2$, questi valori possono essere calcolati integrando in coordinate sferiche la densità di massa per la distanza dall'asse al quadrato:

$$I_{sfera} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \int_0^{R} \rho(r\sin(\theta))^2 \cdot r^2 \sin(\theta) d\theta dr \tag{5.4}$$

$$I_{guscio} = \int_0^{2\pi} d\phi \int_0^{\pi} \rho \ (R\sin(\theta))^2 \cdot R^2 \sin(\theta) d\theta \tag{5.5}$$

  Considerato che l'asse di rotazione è a distanza R dal diametro ad esso parallelo il teorema di Huygens-Steiner permette di scrivere

$$I_1 = I_{sfera} + I_{guscio} = \left(\frac{2}{5}mR^2 + mR^2\right) + \left(\frac{2}{3}(\frac{m}{4})R^2 + \frac{m}{4}R^2\right) \tag{5.6}$$

  da cui si ottiene $L = \frac{1}{2}I\omega^2 = 64.13J$

- In che modo il sistema compie lavoro allontanando la sfera? sebbene la sfera viene "lasciata slittare senza attrito" dobbiamo supporre che vi sia stata una forza che ne controlli lo slittamento (da visualizzare come una corda mollata pian piano) questa forza ha momento nullo perché parallela al braccio dunque *si conserva il momento angolare totale*:

$$I_1\omega_1 = I_2\omega_2 \tag{5.7}$$

Per calcolare $I_2$ basta applicare ancora una volta il teorema di Huygens-Steiner. Invertendo la 5.7 si ottiene $\omega_2 = 7.14$ rad/s, da cui infine si calcola $\Delta E_{rot} = \frac{1}{2}I_1\omega_1^2 - \frac{1}{2}I_2\omega_2^2 = 33.6$J

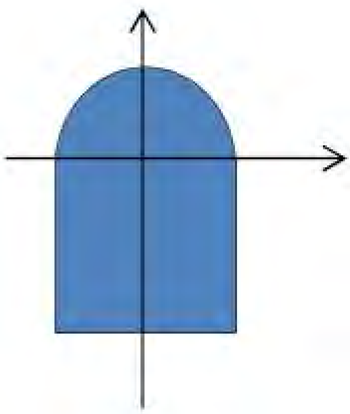

**Figura 5.2**

## Problema B1 prova del 29/08/16

- Si fa riferimento alla figura 5.2. Per calcolare la posizione del CM del corpo dobbiamo fare la media pesata del CM dei due corpi (lastra quadrata e lastra semicircolare) prese separatamente. Per simmetria possiamo subito dire che $P_{quadr} = (0, -R)$. Per la lastra semicircolare per simmetria vale che il CM giace sull'asse y, l'altra coordinata si calcola con la definizione integrale

$$y_{CM}^{semid} = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^\pi y r dr d\theta = \frac{2}{\pi R^2}\int_0^R \int_0^\pi r^2 \sin(\theta) dr d\theta = \frac{4R}{3\pi} \tag{5.8}$$

Assunta senza perdita di generalità una densità di massa costante $\rho = 1kgm^{-2}$ si ottiene semplicemente una massa in unità di area, per cui

$$y_{CM} = \frac{\frac{\pi R^2}{2}\left(\frac{4R}{3\pi}\right) + 4R^2\left(-R\right)}{\frac{\pi R^2}{2} + 4R^2} \tag{5.9}$$

- Per quanto riguarda il momento di inerzia del semidisco questo può essere ricavato ragionando sul fatto che il momento di inezia è additivo ed entrambi gli assi di rotazione sono assi di simmetria per il disco intero, dunque sia per rotazioni lungo $y$ che lungo $x$ si ha per il momento di inerzia[1] $I_{semid} = I_{disc}/2 = \frac{1}{4}(M)R^2/2 = \frac{1}{8}\pi R^4$.
  Per la lastra il momento di inerzia per rotazioni lungo l'asse x vale

$$I_{xx} = |\int_{-R}^{R} dx \int_{0}^{-2R} y^2 dy| = \frac{16R^4}{3}. \tag{5.10}$$

  Mettendo assieme

$$I_{tot,xx} = \frac{1}{8}\pi R^4 + \frac{16R^4}{3} \tag{5.11}$$

  Per una rotazione lungo y il momento di inerzia del semidisco è lo stesso mentre per la lastra si ha

$$I_{yy} = |\int_{0}^{-2R} dy \int_{-R}^{R} x^2 dx| = \frac{4R^4}{3}. \tag{5.12}$$

  dunque mutatis mutandis

$$I_{tot,yy} = \frac{1}{8}\pi R^4 + \frac{4R^4}{3} \tag{5.13}$$

- Il terzo punto è un po' più sottile. Il nostro fine è applicare il teorema di Huygens-Steiner ma per far questo dobbiamo conoscere momento di inerzia della lastra semicircolare e quadrata rispetto ai rispettivi CM e poi aggiungere ad ognuna il contributo dato da Huygens-Steiner e sommare il tutto. Per un disco intero sappiamo che il momento di inerzia relativo all'asse passante per il suo centro vale $I_{0,zz}^{disc} = MR^2/2$, o, assunta densità di massa unitaria, $I_{0,zz}^{disc} = \pi R^4/2$ (dove il pedice 0 indica il momento di inerzia relativo all'asse passante per il centro del disco). Sfruttiamo sempre la proprietà additiva per poter dire che questo

[1] NB: le dimensioni non sono $[L]^4$ ma correttamente $[L]^2$ perché abbiamo assunto una densità di massa $\rho = 1kgm^{-2}$ che ha dimensioni $[M][L]^{-2}$

momento di inerzia è il doppio di quello del semidisco con lo stesso asse di rotazione $I_{0,zz}^{semid} = \frac{1}{2} I_{0,zz}^{disc}$ ma per Huygens-Steiner vale che

$$I_{0,zz}^{semid} = I_{CM,zz}^{semid} + \frac{\pi R^2}{2} |O - y_{CM}^{semid}|^2 \tag{5.14}$$

Conoscendo la posizione del CM dalla 5.8 per il semidisco si ricava $I_{CM,zz}^{semid}$.
Per la lastra quadrata il momento di inerzia si calcola direttamente tramite la definizione

$$I_{CM,zz}^{quadr} = \int_{-R}^{R} \int_{-R}^{R} (x^2 + y^2) dx dy = \frac{32}{3} R^4. \tag{5.15}$$

A questo punto bisogna calcolare la distanza fra il centro di massa del semidisco e della lastra quadrata e il centro di massa dell'intero corpo ottenendo

$$I_{zz} = I_{CM,zz}^{quadr} + I_{CM,zz}^{semid} + M^{semid} |y_{CM}^{semid} - y_{CM}|^2 + M^{lastra} |y_{CM}^{lastra} - y_{CM}|^2 \tag{5.16}$$

- Per l'ultimo punto bisogna scrivere l'equazione del pendolo fisico applicando ancora Huygens-Steiner

$$I = I_{zz} + M_{tot} |Q - y_{CM}|^2 \tag{5.17}$$

dove $Q = (0, R)$ e $I_{zz}$ è dato dalla 5.16 e $y_{CM}$ in questa formula è quello dell'intero corpo dato dalla 5.9. In approssimazione di piccole oscillazioni si ha

$$I \frac{d^2}{dt^2} \theta = (M_{tot} g |Q - y_{CM}|) \theta \tag{5.18}$$

ottenendo

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{M_{tot} g |Q - y_{CM}|}} \tag{5.19}$$